Výroková a predikátová logika - cvičení 7

1. Zapište následující věty jako formule predikátové logiky prvního řádu.
   (a) Některá přirozená čísla jsou zajímavá a některá ne.
   (b) Existuje nejmenší nezajímavé přirozené číslo. (*To je ale zajímavé číslo!*)
   (c) Existuje někdo, kdo když pije, pijí i všichni ostatní.
   (d) Žádný jednorožec nemá dva rohy.
   (e) Žádný jednorožec, který není zmutovaný, nemá dva rohy.
   (f) Nějaký zmutovaný jednorožec má dva rohy.
   (g) Má-li nějaký jednorožec dva rohy, pak je zmutovaný.

2. Určete volné a vázané výskyty proměnných v následujících formulích. Poté je převeďte na varianty kde se nebudou tytéž proměnné vyskytovat volně i vázaně zároveň.
   (a) $(\exists x)(\forall y)P(x,z) \vee (y=0)$
   (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall x)Q(x)) \vee (x=0)$
   (c) $(\exists x)(x>y) \wedge (\exists y)(y>x)$

3. Buď φ formule $(\forall x)((x=z) \vee (\exists y)(f(x)=y) \vee (\forall z)(y=f(z)))$. Které termy jsou substituovatelné do φ za její proměnné?
   (a) Term z za x, term y za x.
   (b) Term z za y, term $2 \star y$ za y.
   (c) Term x za z, term y za z.

4. Mohou nastat následující situace?
   (a) $\mathcal{A} \vDash x+x=x$
   (b) $\mathcal{A} \vDash x+x=x[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \nvDash x+x=x[e_2]$
   (c) $\mathcal{A} \vDash \forall x(x+x=x)[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \nvDash \forall x(x+x=x)[e_2]$
   (d) $\mathcal{A} \vDash x+x \neq x+x[e_1]$
   (e) $\mathcal{A} \vDash \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \nvDash \forall x\varphi(x)$
   (f) $\mathcal{A} \nvDash \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \nvDash \neg\varphi(x)$
   (g) $\mathcal{A} \vDash \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi(x)$
   (h) $\mathcal{A} \nvDash \varphi$ a zároveň $\mathcal{A} \nvDash \neg\varphi$, kde φ je sentence
   (i) $\mathcal{A} \vDash \forall x\forall y(f(x)=f(y) \to x=y) \wedge \exists x\forall y(f(y) \neq x)$

5. Rozhodněte, zda jsou následující formule (logicky) pravdivé/lživé/nezávislé.
   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y)) \to (\forall y)(\exists x)(P(x,y))$
   (b) $\exists x(x \neq x)$
   (c) $\exists x R(x,x) \wedge \forall y \neg R(y,y)$
   (d) $\forall x P(x) \wedge \exists y \forall x(x \neq y \to \neg P(x))$

6. Lze následující dvojice formulí rozlišit platností v nějaké struktuře?
   (a) $\varphi \to \exists x\psi$, $\exists x(\varphi \to \psi)$
   (b) $\exists x\varphi \to \psi$,$\forall x(\varphi \to \psi)$