Výroková a predikátová logika - cvičení 8

1. Mohou nastat následující situace?
   (a) $\mathcal{A} \models x + x = x$
   (b) $\mathcal{A} \models x + x = x[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models x + x = x[e_2]$
   (c) $\mathcal{A} \models \forall x(x + x = x)[e_1]$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \forall x(x + x = x)[e_2]$
   (d) $\mathcal{A} \models x + x \neq x + x[e_1]$
   (e) $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \forall x\varphi(x)$
   (f) $\mathcal{A} \not\models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi(x)$
   (g) $\mathcal{A} \models \varphi(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \models \neg\varphi(x)$
   (h) $\mathcal{A} \not\models \varphi$ a zároveň $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$, kde φ je sentence
   (i) $\mathcal{A} \models \forall x\forall y(f(x) = f(y) \to x = y) \wedge \exists x\forall y(f(y) \neq x)$

2. Rozhodněte, zda jsou následující formule (logicky) pravdivé/lživé/nezávislé.
   (a) $(\exists x)(\forall y)(P(x, y)) \to (\forall y)(\exists x)(P(x, y))$
   (b) $\exists x(x \neq x)$
   (c) $\exists x R(x, x) \wedge \forall y \neg R(y, y)$
   (d) $\forall x P(x) \wedge \exists y\forall x(x \neq y \to \neg P(x))$

3. Lze následující dvojice formulí rozlišit platností v nějaké struktuře?
   (a) $\varphi \to \exists x\psi$, $\exists x(\varphi \to \psi)$
   (b) $\exists x\varphi \to \psi$,$\forall x(\varphi \to \psi)$

4. Buď T teorie s jedním axiomem $\exists x\exists y(x \neq y)$. Pro T' rozhodněte, zda je extenzí T. Pokud ano, je jednoduchá/konzervativní?
   (a) $T' = \{\exists x\exists y\exists z(x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)\}$
   (b) $T' = \{c_1 \neq c_2 \wedge c_2 \neq c_3 \wedge c_1 \neq c_3\}$
   (c) $T' = \{\forall x(f(x) = x)\}$
   (d) $T' = \{\forall x\neg(f(x) = x)\}$

5. Uveďte příklad definovatelné/nedefinovatelné množiny ve struktuře $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$.

6. Uveďte příklad definovatelné množiny ve struktuře $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$. Existuje podmnožina $\mathbb{N}$ nedefinovatelná v této struktuře?

7. Uvažme teorii grup v jazyce $\mathcal{L} = \{+, -, 0\}$ s axiomy $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x + 0 = x = 0 + x$, $x + (-x) = -x + x$. Určete, zda jsou v ní následující formule pravdivé/lživé/nezávislé.
   (a) $x + y = y + x$,
   (b) $x + y = x \to y = 0$,
   (c) $-(x + y) = (-y) + (-x)$

8. Uvažme grupu $\mathbb{Z}_4$.
   (a) Určete všechny její podstrukutry generované jedním prvkem.
   (b) Určete všechny její podstruktury.

(c) Je každá její podstruktura grupou?

(d) Jsou všechny její podstruktury elementárně ekvivalentní?

9. Jsou všechny grupy komutativní? Je každá podstruktura komutativní grupy komutativní grupou? Je teorie grup kompletní teorií?

10. Uvažme strukturu racionálních čísel v jazyce $\mathcal{L} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$.

    (a) Existuje její redukt, který je modelem teorie grup?

    (b) Lze redukt $\langle \mathbb{Q}, \cdot, 1 \rangle$ expandovat na model teorie grup?

    (c) Obsahuje struktura racionálních čísel podstrukturu, která s ní není elementárně ekvivalentní?