Výroková a predikátová logika - cvičení 9

1. Buď T teorie s jedním axiomem $\exists x \exists y (x \neq y)$. Pro T' rozhodněte, zda je extenzí T. Pokud ano, je jednoduchá/konzervativní?

   (a) $T' = \{\exists x \exists y \exists z (x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)\}$

   (b) $T' = \{c_1 \neq c_2 \wedge c_2 \neq c_3 \wedge c_1 \neq c_3\}$

   (c) $T' = \{\forall x (f(x) = x)\}$

   (d) $T' = \{\forall x \neg (f(x) = x)\}$

2. Uveďte příklad definovatelné/nedefinovatelné množiny ve struktuře $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$.

3. Uveďte příklad definovatelné množiny ve struktuře $\langle \mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, \leq \rangle$. Existuje podmnožina $\mathbb{N}$ nedefinovatelná v této struktuře?

4. Pomocí tablo metody dokažte následující formule, či sestrojte na základě nějaké bezesporné dokončené větve kanonický model jako protipříklad. Pro jednoduchost uvažujte, že pracujeme v jazyce bez rovnosti, pokud se symbol $=$ ve formuli nevyskytuje.

   (a) $\exists x \forall y R(x, y) \rightarrow \forall y \exists x R(x, y)$

   (b) $\forall y \exists x R(x, y) \rightarrow \exists x \forall y R(x, y)$

   (c) $x = x$

   (d) $x = y \rightarrow y = x$

   (e) $\forall x P(x) \rightarrow \forall x P(f(x))$

   (f) $\forall x P(f(x)) \rightarrow \forall x P(x)$

   (g) $\forall x (c = f(x)) \rightarrow \forall x (f(f(x)) = c)$

   (h) $\forall x (f(f(x)) = c) \rightarrow \forall x (f(x) = c)$

5. Víme že,

   (a) Všichni vinni lžou.

   (b) Alespoň jeden obviněný je svědek.

   (c) Svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

6. Dokažte větu o konstantách syntakticky, tj. pomocí transformací tabel.

7. Dokažte větu o dedukci syntakticky, tj. pomocí transformací tabel.

8. Pomocí tablo metody dokažte, že $T \vdash \varphi$, či sestrojte na základě nějaké bezesporné dokončené větve kanonický model jako protipříklad. Pro jednoduchost uvažujte, že pracujeme v jazyce bez rovnosti, pokud se symbol $=$ nevyskytuje v žádné z uvedených formulí.

   (a) $T = \{P(c_1), c_1 = c_2\}$, φ je $P(c_2)$

   (b) $T = \{P(f(x))\}$, φ je $P(x)$

   (c) $T = \{\forall x (P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x)\}$, φ je $\exists x P(x)$

   (d) $T = \{\forall x (P(x) \vee Q(x)), \exists x \neg Q(x)\}$, φ je $\forall x P(x)$