Výroková a predikátová logika - test 2, var. A, 19. 12. 2017
(12 bodů, 60 minut)

1. Formalizujte následující věty formulemi predikátové logiky prvního řádu. Z mimologických symbolů máte k dispozici pouze unární predkát $U(x)$ (x je úloha), unární predikát $T(x)$ (x je těžké), binární predikát $V(x, y)$ (x vyřeší y), unární predikát $Z(x)$ (x ztratí bod) a unární predikát $F(x)$ (x umí formalizovat věty).

   (a) Pokud je nějaká úloha těžká, nikdo ji nevyřeší. (1 bod)

   (b) Ne každý, kdo ztratí bod, neumí formalizovat věty. (1 bod)

2. Pro níže zadané T a φ pomocí tablo metody dokažte $T \vdash \varphi$ či na základě dokončeného tabla sestroje kanonický model, který je protipříkladem. Pracujte v jazyce s rovností. R je binární predikát, P unární predikát, f unární funkce, c konstanta, x proměnná.

   (a) $T = \{(\forall x)(\exists y)R(x, y)\}$, φ je $(\forall y)(\exists x)R(x, y)$. (2 body)

   (b) $T = \{(\forall x)P(f(f(x))), (\forall x)(f(x) = c)\}$, φ je $P(c)$. (2 body)

3. Rozhodněte, zda existuje struktura $\mathcal{A}$ s následujícími vlastnostmi. Pokud ano, uveďte příklad takové struktury (zadejte univerzum struktury a realizace všech symbolů jazyka). Pokud ne, zdůvodněte, proč taková struktura neexistuje. f je unární funkce, c konstanta, x proměnná.

   (a) $\mathcal{A} \vDash (\forall x)(f(f(x) = c))$ a zároveň $\mathcal{A} \vDash (\exists x)(f(x) \neq c)$ (1,5 bodu)

   (b) $\mathcal{A} \vDash (\forall x)(f(x) = c)$ a zároveň $\mathcal{A} \vDash (\forall x)(f(x) \neq x)$ (1,5 bodu)

4. Teorie T a T' jsou teorie v jazyce s rovností obsahujícím pouze konstantní symboly c_1, c_2. Rozhodněte, zda teorie T' je extenzí teorie T. Pokud ano, rozhodněte, zda je konzervativní extenzí. Rozhodnutí zdůvodněte. (1,5 bodu)

   $T = \{\forall x(x = c_1 \vee x = c_2)\}$, $T' = \{(\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge \forall z(z = x \vee z = y))\}$.

5. Uvažme struktury $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$, $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Je struktura $\mathcal{B}$ podstrukturou struktury $\mathcal{A}$? (Přirozená čísla chápeme jako podmnožinu čísel reálných.) Jsou struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní? Odpovědi zdůvodněte. (1,5 bodu)