Výroková a predikátová logika - test 2, var. B, 19. 12. 2017
(12 bodů, 60 minut)

1. Formalizujte následující věty formulemi predikátové logiky prvního řádu. Z mimologických symbolů máte k dispozici pouze unární predkát $U(x)$ (x je úloha), unární predikát $L(x)$ (x je lehké), binární predikát $V(x, y)$ (x vyřeší y), unární predikát $Z(x)$ (x ztratí bod) a unární predikát $F(x)$ (x umí formalizovat věty).

   (a) Jestliže někdo neumí formalizovat věty, ztratí bod. (1 bod)

   (b) Žádná úloha, kterou nikdo nevyřeší, není lehká. (1 bod)

2. Pro níže zadané T a φ pomocí tablo metody dokažte $T \vdash \varphi$ či na základě dokončeného tabla sestroje kanonický model, který je protipříkladem. Pracujte v jazyce s rovností. R je binární predikát, P unární predikát, f unární funkce, c konstanta.

   (a) $T = \{(\exists x)(\forall y)R(x, y)\}$, φ je $(\exists y)(\forall x)R(x, y)$. (2 body)

   (b) $T = \{(\forall x)P(f(f(x))), (\forall x)(P(x) \to x = c)\}$, φ je $P(c)$. (2 body)

3. Rozhodněte, zda existuje struktura $\mathcal{A}$ s následujícími vlastnostmi. Pokud ano, uveďte příklad takové struktury (zadejte univerzum struktury a realizace všech symbolů jazyka). Pokud ne, zdůvodněte, proč taková struktura neexistuje. P, Q, R jsou unární predikáty, c konstanta, x, y proměnné.

   (a) $\mathcal{A} \models (P(x) \to Q(x)) \wedge (Q(x) \to R(x))$, $\mathcal{A} \not\models R(x)$ a zároveň $\mathcal{A} \models (\exists x)P(x)$ (1,5 bodu)

   (b) $\mathcal{A} \models (\exists x)(\exists y)(x \neq y)$ a zároveň $\mathcal{A} \models (\forall x)(x \neq c \to x = c)$ (1,5 bodu)

4. Teorie T a T' jsou teorie v jazyce s rovností obsahujícím pouze konstantní symboly c_1, c_2. Rozhodněte, zda teorie T' je extenzí teorie T. Pokud ano, rozhodněte, zda je konzervativní extenzí. Rozhodnutí zdůvodněte. (1,5 bodu)

   $T = \{(\exists x)(x \neq c_1 \wedge x \neq c_2)\}$, $T' = \{(\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge \forall z(z = x \vee z = y))\}$.

5. Uvažme strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, 1, +, \leq \rangle$. Buď $\mathcal{B}$ podstruktura $\mathcal{A}$ generovaná prvkem 1. Zapište univerzum B struktury $\mathcal{B}$. Jsou struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní? Odpověd zdůvodněte. (1,5 bodu)