

Výroková a predikátová logika - test 2, var. N, 16. 1. 2018
(12 bodů, 60 minut)

1. Formalizujte následující věty formulemi predikátové logiky prvního řádu. Z mimologických symbolů máte k dispozici pouze unární predikáty $S(x)$ (x se snaží), $Z(x)$ (x dostane zápočet) a $V(x)$ (x má vážně velkou smůlu).
 - (a) Jestliže se někdo snaží, tak dostane zápočet, pokud nemá vážně velkou smůlu. (1 bod)
 - (b) Ne všichni, kdo se snaží, dostanou zápočet. (1 bod)
2. Pro níže zadané T a φ pomocí tablo metody dokažte $T \vdash \varphi$ či na základě dokončeného tablu sestroje kanonický model, který je protipříkladem. Pokud žádná formule neobsahuje symbol $=$, pracujte v jazyce bez rovnosti. Q je binární predikát, P unární predikát, f unární funkce, c konstanta.
 - (a) $T = \{(\forall x)(P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y))\}$, φ je $(\exists x)(\neg P(x))$. (2 body)
 - (b) $T = \{(\forall x)(f(f(x)) = c), (\exists x)\neg(x = c)\}$, φ je $(\exists x)(\forall y)\neg(f(f(y) = x))$. (2 body)
3. Rozhodněte, zda existuje struktura \mathcal{A} s následujícími vlastnostmi. Pokud ano, uveďte příklad takové struktury (zadejte univerzum struktury a realizace všech symbolů jazyka). Pokud ne, zdůvodněte, proč taková struktura neexistuje. P, Q, R jsou unární predikáty, f, g unární funkce, x, y, z proměnné.
 - (a) $\mathcal{A} \not\models (P(x) \rightarrow Q(x)), \mathcal{A} \not\models (Q(x) \rightarrow R(x)), \mathcal{A} \not\models (R(x) \rightarrow P(x))$ a zároveň $\mathcal{A} \models (\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge \forall z(z = x \vee z = y))$ (1,5 bodu)
 - (b) $\mathcal{A} \models \forall x(f(x) \neq g(x))$ a zároveň $\mathcal{A} \models (\forall x)(f(f(x)) = g(g(x)))$ (1,5 bodu)
4. Teorie T a T' jsou teorie v jazyce s rovností obsahujícím pouze konstantní symboly c_1, c_2 . Rozhodněte, zda teorie T' je extenzí teorie T . Pokud ano, rozhodněte, zda je konzervativní extenzí. Rozhodnutí zdůvodněte. (1,5 bodu)
$$T = \{c_1 \neq c_2\}, T' = \{(\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge \forall z(z = x \vee z = y))\}.$$
5. Uvažme strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, s \rangle$, kde s je unární funkce následníka, tj. pro každé celé číslo z platí $s(z) = z + 1$. Bud' \mathcal{B} podstruktura \mathcal{A} generovaná prvkem 0. Zapište univerzum B struktury \mathcal{B} . Jsou struktury \mathcal{A}, \mathcal{B} elementárně ekvivalentní? Odpověď zdůvodněte. (1,5 bodu)