Výroková a predikátová logika - opravný test, 16. 1. 2018
(18 bodů, 90 minut)

VÝROKOVÁ LOGIKA:

1. Buď φ formule $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
   (a) Formuli $\neg\varphi$ převeďte do CNF a množinové reprezentace. (1 bod)
   (b) Pomocí rezoluce dokažte φ (tedy nalezněte rezoluční vyvrácení $\neg\varphi$). (1 bod)
2. Buď $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$, $T = \{p, q\}$, $\varphi = q \vee r$. Odpovězte na následující otázky, odpovědi vždy zdůvodněte.
   (a) Kolik existuje vzájemně neekvivalentních formulí nad $\mathbb{P}$? (1 bod)
   (b) Kolik má T modelů nad $\mathbb{P}$? (1 bod)
   (c) Kolik existuje vzájemně neekvivalentních formulí nad $\mathbb{P}$ nezávislých v T? (1 bod)
   (d) V kolika modelech T platí φ? (1 bod)

PREDIKÁTOVÁ LOGIKA:

1. Formalizujte následující věty formulemi predikátové logiky prvního řádu. Z mimologických symbolů máte k dispozici pouze unární predkáty $S(x)$ (x se snaží), $Z(x)$ (x dostane zápočet) a $V(x)$ (x má vážně velkou smůlu).
   (a) Jestliže se někdo snaží, tak dostane zápočet, pokud nemá vážně velkou smůlu. (1 bod)
   (b) Ne všichni, kdo se snaží, dostanou zápočet. (1 bod)
2. Pro níže zadané T a φ pomocí tablo metody dokažte $T \vdash \varphi$ či na základě dokončeného tabla sestroje kanonický model, který je protipříkladem. Pokud žádná formule neobsahuje symbol $=$, pracujte v jazyce bez rovnosti. Q je binární predikát, P unární predikát, f unární funkce, c konstanta.
   (a) $T = \{(\forall x)(P(x) \to \exists y Q(x, y))\}$, φ je $(\exists x)(\neg P(x))$. (2 body)
   (b) $T = \{(\forall x)(f(f(x)) = c), (\exists x)\neg(x = c)\}$, φ je $(\exists x)(\forall y)\neg(f(f(y) = x))$. (2 body)
3. Rozhodněte, zda existuje struktura $\mathcal{A}$ s následujícími vlastnostmi. Pokud ano, uveďte příklad takové struktury (zadejte univerzum struktury a realizace všech symbolů jazyka). Pokud ne, zdůvodněte, proč taková struktura neexistuje. P, Q, R jsou unární predikáty, f, g unární funkce, x, y, z proměnné.
   (a) $\mathcal{A} \not\models (P(x) \to Q(x))$, $\mathcal{A} \not\models (Q(x) \to R(x))$, $\mathcal{A} \not\models (R(x) \to P(x))$ a zároveň $\mathcal{A} \models (\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge \forall z(z = x \vee z = y))$ (1,5 bodu)
   (b) $\mathcal{A} \models \forall x(f(x) \neq g(x))$ a zároveň $\mathcal{A} \models (\forall x)(f(f(x)) = g(g(x)))$ (1,5 bodu)
4. Teorie T a T' jsou teorie v jazyce s rovností obsahujícím pouze konstantní symboly c_1, c_2. Rozhodněte, zda teorie T' je extenzí teorie T. Pokud ano, rozhodněte, zda je konzervativní extenzí. Rozhodnutí zdůvodněte. (1,5 bodu)

   $T = \{c_1 \neq c_2\}$, $T' = \{(\exists x)(\exists y)((x \neq y) \wedge \forall z(z = x \vee z = y))\}$.
5. Uvažme strukturu $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, s \rangle$, kde s je unární funkce následníka, tj. pro každé celé číslo z platí $s(z) = z + 1$. Buď $\mathcal{B}$ podstruktura $\mathcal{A}$ generovaná prvkem 0. Zapište univerzum B struktury $\mathcal{B}$. Jsou struktury $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ elementárně ekvivalentní? Odpověd zdůvodněte. (1,5 bodu)