Výroková a predikátová logika - I

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

K čemu je logika?

Pro matematiky: *“matematika o matematice”*.

Pro informatiky:

- formální specifikace (viz spor EU vs. Microsoft),
- testování software i hardware (formální verifikace, model checking),
- deklarativní programování (např. Prolog),
- složitost (Booleovské funkce, obvody, rozhodovací stromy),
- vyčíslitelnost (nerozhodnutelnost, věty o neúplnosti),
- umělá inteligence (automatické odvozování, rezoluce),
- univerzální nástroje: SAT a SMT řešiče (SAT modulo theory),
- návrh databází (konečné relační struktury, Datalog), ...

Koncepce přednášky

- klasická logika
  - výroková logika (nejprve samostatně)
  - predikátová logika
  - teorie modelů, nerozhodnutelnost, neúplnost
- logika pro informatiky
  - tablo metoda namísto Hilbertovského kalkulu
  - dokazování jako forma výpočtu (systematické hledání protipříkladu)
  - rezoluce v predikátové logice, unifikace, “pozadí” Prologu
  - důraz na algoritmické otázky
  - omezení na spočetné jazyky

Doporučená literatura

- Knihy
  - A. Nerode, R. A. Shore, *Logic for Applications*, Springer, 2^{nd} edition, 1997.
  - P. Pudlák, *Logical Foundations of Mathematics and Computational Complexity - A Gentle Introduction*, Springer, 2013.
  - V. Švejdar, *Logika, neúplnost, složitost a nutnost*, Academia, Praha, 2002.
  - A. Sochor, *Klasická matematická logika*, UK v Praze - Karolinum, 2001.
  - W. Hodges, *Shorter Model Theory*, Cambridge University Press, 1997.
  - W. Rautenberg, *A concise introduction to mathematical logic*, Springer, 2009.
- Elektronické zdroje
  - J. Mlček, *Výroková a predikátová logika*, skripta k přednášce, 2012. [www]
  - P. Štěpánek, *Meze formální metody*, skripta k přednášce, 2000. [pdf]
  - M. Pilát, Propositional and Predicate Logic, lecture notes, 2017. [pdf]
  - slidy k přednášce

Trocha historie

- Aristotelés (384-322 př.n.l.) - sylogismy, např.

  z *'žádný Q není R'* a *'každý P je Q'* odvoď *'žádný P není R'*.

- Eukleidés: *Základy* (asi 330 př.n.l.) - axiomatický přístup ke geometrii

  "Pro každou přímku p a bod x, který neleží na p, existuje přímka skrze x neprotínající p." (5. postulát)

- Descartes: *Geometrie* (1637) - algebraizace geometrie
- Leibniz - sen o *"lingua characteristica"* a *"calculus ratiocinator"* (1679-90)
- De Morgan - zavedení logických spojek (1847)

$$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$
$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

- Boole - výrok jako binární funkce, algebraizace logiky (1847)
- Schröder - sémantika predikátové logiky, koncept modelu (1890-1905)

Trocha historie - teorie množin

- Cantor - *intuitivní* teorie množin (1878), např. princip zahrnutí

  "Pro každou vlastnost $\varphi(x)$ existuje množina $\{x \mid \varphi(x)\}$."

- Frege - logika s kvantifikátory a predikáty, pojem důkazu jako odvození, axiomatická teorie množin (1879, 1884)
- Russel - Fregeho teorie množin je sporná (1903)

  Pro $a = \{x \mid \neg(x \in x)\}$ *je* $a \in a$ *?*

- Russel, Whitehead - teorie typů (1910-13)
- Zermelo (1908), Fraenkel (1922) - *standardní* teorie množin ZFC, např.

  "Pro každou vlastnost $\varphi(x)$ a množinu y existuje množina $\{x \in y \mid \varphi(x)\}$."

- Bernays (1937), Gödel (1940) - teorie množin založená na třídách, např.

  "Pro každou množinovou vlastnost $\varphi(x)$ existuje třída $\{x \mid \varphi(x)\}$."

Trocha historie - algoritmizace

- Hilbert - kompletní axiomatizace Euklidovské geometrie (1899),
  formalismus - striktní odproštění se od významu, mechaničnost

  "... musí být možné místo o bodu, přímce a rovině mluvit o stolu, židli a půllitru." (Grundlagen der Geometrie)
- Brouwer - intuicionismus, důraz na konstruktivní důkazy

  "Matematické tvrzení je myšlenková konstrukce ověřitelná intuicí."
- Post - úplnost výrokové logiky (1921)
- Gödel - úplnost predikátové logiky (1930), věty o neúplnosti (1931)
- Kleene, Post, Church, Turing - formalizace pojmu algoritmus,
  existence algoritmicky nerozhodnutelných problémů (1936)
- Robinson - rezoluční metoda (1965)
- Kowalski; Colmerauer, Roussel - Prolog (1972)

Jazyk matematiky

Logika formalizuje pojem důkazu a pravdivosti matematických tvrzení.

Lze ji postupně rozčlenit dle prostředků jazyka.

- logické spojky *výroková logika*

  Umožňují vytvářet složená tvrzení ze základních.
- proměnné pro individua, funkční a relační symboly, kvantifikátory *1. řádu*

  Tvrzení o individuích, jejich vlastnostech a vztazích. Teorii množin, která je *"světem"* (téměř) celé matematiky, lze popsat jazykem 1. řádu.

V jazyce vyšších řádů máme navíc

- proměnné pro množiny individuí (i relace a funkce) *logika 2. řádu*
- proměnné pro množiny množin individuí, *atd.* *logika 3. řádu*
- ...

Příklady tvrzení v jazycích různých řádů

- *"Nebude-li pršet, nezmoknem. A když bude pršet, zmokneme, na sluníčku zase uschneme."* výrok

$$(\neg p \rightarrow \neg z) \land (p \rightarrow (z \land u))$$

- *"Existuje nejmenší prvek."* 1. řádu

$$\exists x\, \forall y\, (x \leq y)$$

- Axiom indukce. 2. řádu

$$\forall X\, ((X(0) \land \forall x(X(x) \rightarrow X(x+1))) \rightarrow \forall x\, X(x))$$

- *"Libovolné sjednocení otevřených množin je otevřená množina."* 3. řádu

$$\forall \mathcal{X} \forall Y ((\forall X(\mathcal{X}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X)) \land \forall x(Y(x) \leftrightarrow \exists X(\mathcal{X}(X) \land X(x)))) \rightarrow \mathcal{O}(Y))$$

Syntax a sémantika

Budeme studovat vztahy mezi syntaxí a sémantikou:

- *syntax*: symboly, pravidla vytváření termů a formulí, odvozovací pravidla, dokazovací systém, důkaz, dokazatelnost,
- *sémantika*: přiřazení významu, struktury, modely, splnitelnost, pravdivost.

V logice zavedeme pojem důkazu jako přesný syntaktický koncept.

Formální dokazovací systém je

- *korektní*, pokud každé dokazatelné tvrzení je pravdivé,
- *úplný*, pokud každé pravdivé tvrzení je dokazatelné.

Uvidíme, že predikátová logika (1. řádu) má dokazovací systémy, které jsou korektní a zároveň úplné. Pro logiky vyšších řádů to neplatí.

Paradoxy

"Paradoxy" jsou inspirací k přesnému zadefinování základů logiky.

- *paradox kréťana*

  Kréťan řekl: "Všichni kréťané jsou lháři."

- *paradox holiče*

  V městě žije holič, jenž holí všechny, kteří se neholí sami.

  Holí sám sebe?

- *paradox lháře*

  Tato věta je lživá.

- *Berryho paradox*

  Výraz "nejmenší přirozené číslo, které nelze definovat méně než jedenácti slovy" ho definuje pomocí deseti slov.