

Výroková a predikátová logika - II

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2018/2019

Jazyk

Výroková logika je “*logikou spojek*”. Vycházíme z (neprázdnej) množiny \mathbb{P} *výrokových proměnných* (*prvovýroků*). Např.

$$\mathbb{P} = \{p, p_1, p_2, \dots, q, q_1, q_2, \dots\}$$

Obvykle budeme předpokládat, že \mathbb{P} je spočetná.

Jazyk výrokové logiky (nad \mathbb{P}) obsahuje *symboly*

- výrokové proměnné z \mathbb{P}
- logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- závorky $(,)$

Jazyk je tedy určen množinou \mathbb{P} . Říkáme, že logické spojky a závorky jsou *logické symboly*, zatímco výrokové proměnné jsou *mimologické symboly*.

Budeme používat i *konstantní* symboly \top (pravda), \perp (spor), jež zavedeme jako *zkratky* za $p \vee \neg p$, resp. $p \wedge \neg p$, kde p je pevný prvovýrok z \mathbb{P} .

Formule

Výrokové formule (*výroky*) (nad \mathbb{P}) jsou dány induktivním předpisem

- (i) každá výroková proměnná z \mathbb{P} je výrokovou formulí,
- (ii) jsou-li φ, ψ výrokové formule, pak rovněž

$$(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$$

jsou výrokové formule,

- (iii) každá výroková formule vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii).

- Výrokové formule jsou tedy (dobře vytvořené) **konečné posloupnosti** symbolů jazyka (**řetězce**).
- Výrokovou formuli, která je součástí jiné výrokové formule φ nazveme **podformulí** (**podvýrokem**) φ .
- Množinu všech výrokových formulí nad \mathbb{P} značíme **$\mathbf{VF}_{\mathbb{P}}$** .
- Množinu všech výrokových proměnných s výskytem ve φ značíme **$\mathbf{var}(\varphi)$** .

Konvence zápisu

Zavedení (obvyklých) *priorit* logických spojek umožňuje v **zkráceném zápisu** vypouštět závorky okolo podvýroku vzniklého spojkou s **vyšší** prioritou.

$$(1) \rightarrow, \leftrightarrow$$

$$(2) \wedge, \vee$$

$$(3) \neg$$

Rovněž vnější závorky můžeme vynechat. Např.

$$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (\neg(p \vee (\neg q)))) \quad \text{Ize zkrátit na} \quad \neg p \wedge q \rightarrow \neg(p \vee \neg q)$$

Poznámka Nerespektováním priorit může vzniknout **nejednoznačný** zápis nebo dokonce jednoznačný zápis **neekvivalentní** formule.

Další možnosti zjednodušení zápisu vyplývají ze sémantických vlastností spojek (**asociativita** \vee, \wedge).

Vytvořující strom

Vytvořující strom je konečný **uspořádaný strom**, jehož vrcholy jsou označeny výroky dle následujících pravidel

- listy (a jen listy) jsou označeny prvovýroky,
- je-li vrchol označen $(\neg\varphi)$, má jediného syna označeného φ ,
- je-li vrchol označen $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ nebo $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, má dva syny, přičemž **levý** syn je označen φ a **pravý** je označen ψ .

Vytvořující strom výroku φ je vytvořující strom s kořenem označeným φ .

Tvrzení Každý výrok má jednoznačně určený vytvořující strom.

Důkaz Snadno indukcí dle počtu vnoření závorek (odpovídající hloubce vytvořujícího stromu). \square

Poznámka Takovéto důkazy nazýváme důkazy indukcí **dle struktury formule**.

Sémantika

- Uvažujeme pouze **dvouhodnotovou** logiku.
- Prvovýroky reprezentují atomická tvrzení, jejich význam je určen přiřazením **pravdivostní hodnoty** 0 (*nepravda*) nebo 1 (*pravda*).
- Sémantika logických spojek je dána jejich **pravdivostními tabulkami**.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ty **jednoznačně** určují hodnotu každého výroku z hodnot prvovýroků.

- K výrokům tedy můžeme také přiřadit "**pravdivostní tabulky**". Říkáme, že **reprezentují** Booleovské funkce (až na určení pořadí proměnných).
- Booleovská funkce** je n -ární operace na $2 = \{0, 1\}$.

Hodnota výroku

- **Ohodnocení** prvovýroků je funkce $v: \mathbb{P} \rightarrow \{0, 1\}$, tj. $v \in \mathbb{P}^2$.
- **Hodnota** $\bar{v}(\varphi)$ výroku φ při ohodnocení v je dána induktivně

$$\begin{array}{ll} \bar{v}(p) = v(p) \text{ jestliže } p \in \mathbb{P} & \bar{v}(\neg\varphi) = -_1(\bar{v}(\varphi)) \\ \bar{v}(\varphi \wedge \psi) = \wedge_1(\bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi)) & \bar{v}(\varphi \vee \psi) = \vee_1(\bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi)) \\ \bar{v}(\varphi \rightarrow \psi) = \rightarrow_1(\bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi)) & \bar{v}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \leftrightarrow_1(\bar{v}(\varphi), \bar{v}(\psi)) \end{array}$$

kde $-_1, \wedge_1, \vee_1, \rightarrow_1, \leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami.

Tvrzení *Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení $\text{var}(\varphi)$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. \square

Poznámka Jelikož funkce $\bar{v}: \text{VF}_{\mathbb{P}} \rightarrow 2$ je jednoznačnou **extenzí** funkce v , můžeme psát v místo \bar{v} aniž by došlo k nedorozumění.

Sémantické pojmy

Výrok φ nad \mathbb{P} je

- **splněn (platí) při ohodnocení** $v \in \mathbb{P}^2$, pokud $\bar{v}(\varphi) = 1$.
Pak v je **splňující ohodnocení** výroku φ , značíme $v \models \varphi$.
- **pravdivý** ((logicky) **platí, tautologie**), pokud $\bar{v}(\varphi) = 1$ pro každé $v \in \mathbb{P}^2$, tj. φ je splněn při každém ohodnocení, značíme $\models \varphi$.
- **lživý (sporný)**, pokud $\bar{v}(\varphi) = 0$ pro každé $v \in \mathbb{P}^2$, tj. $\neg\varphi$ je pravdivý.
- **nezávislý**, pokud $\bar{v}_1(\varphi) = 0$ a $\bar{v}_2(\varphi) = 1$ pro nějaká $v_1, v_2 \in \mathbb{P}^2$, tj. φ není ani pravdivý ani lživý.
- **splnitelný**, pokud $\bar{v}(\varphi) = 1$ pro nějaké $v \in \mathbb{P}^2$, tj. φ není lživý.

Výroky φ a ψ jsou (logicky) **ekvivalentní**, psáno $\varphi \sim \psi$, pokud $\bar{v}(\varphi) = \bar{v}(\psi)$ pro každé $v \in \mathbb{P}^2$, tj. výrok $\varphi \leftrightarrow \psi$ je pravdivý.

Modely

Předchozí definice ekvivalentně přeformulujeme v terminologii modelů.

Model jazyka nad \mathbb{P} je ohodnocení z \mathbb{P}^2 . Třída všech modelů jazyka nad \mathbb{P} se značí $M(\mathbb{P})$, tedy $M(\mathbb{P}) = \mathbb{P}^2$. Výrok φ nad \mathbb{P} (je)

- **platí v modelu** $v \in M(\mathbb{P})$, pokud $\bar{v}(\varphi) = 1$. Pak v je **model výroku** φ , značíme $v \models \varphi$ a $M^{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M(\mathbb{P}) \mid v \models \varphi\}$ je **třída modelů** φ .
- **pravdivý** ((logicky) **platí, tautologie**), pokud platí v každém modelu (jazyka), značíme $\models \varphi$.
- **lživý (sporný)**, pokud nemá model.
- **nezávislý**, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v jiném.
- **splnitelný**, pokud má model.

Výroky φ a ψ jsou (logicky) **ekvivalentní**, psáno $\varphi \sim \psi$, pokud mají stejné modely.

Univerzálnost spojek

Jazyk výrokové logiky obsahuje *základní* spojky \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow .

Můžeme zavést obecně n -ární spojku pro libovolnou Booleovu funkci. Např.

$p \downarrow q$ “*ani p ani q* ” (NOR, Peirceova spojka)

$p \uparrow q$ “*ne (p a q)*” (NAND, Shefferova spojka)

Množina spojek je *univerzální*, pokud lze každou Booleovskou funkci reprezentovat nějakým z nich (dobře) vytvořeným výrokem.

Tvrzení $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je univerzální.

Důkaz Funkci $f: {}^n 2 \rightarrow 2$ reprezentuje výrok $\bigvee_{v \in f^{-1}[1]} \bigwedge_{i=0}^{n-1} p_i^{v(i)}$, kde $p_i^{v(i)}$ je prvovýrok p_i pokud $v(i) = 1$, jinak výrok $\neg p_i$. Pro $f^{-1}[1] = \emptyset$ zvolíme \perp . \square

Tvrzení $\{\neg, \rightarrow\}$ je univerzální.

Důkaz $(p \wedge q) \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$, $(p \vee q) \sim (\neg p \rightarrow q)$. \square

CNF a DNF

- **Literál** je prvovýrok nebo jeho negace. Je-li p prvovýrok, označme p^0 literál $\neg p$ a p^1 literál p . Je-li l literál, označme \bar{l} literál **opačný** k l .
- **Klauzule** je disjunkce literálů, **prázdnou klauzulí** rozumíme \perp .
- Výrok je v **konjunktivně normálním tvaru (CNF)**, je-li konjunkcí klauzulí. **Prázdným výrokem v CNF** rozumíme \top .
- **Elementární konjunkce** je konjunkce literálů, **prázdnou konjunkcí** je \top .
- Výrok je v **disjunktivně normálním tvaru (DNF)**, je-li disjunkcí elementárních konjunktí. **Prázdným výrokem v DNF** rozumíme \perp .

Poznámka Klauzule nebo elementární konjunkce je zároveň v CNF i DNF.

Pozorování Výrok v CNF je pravdivý, právě když každá jeho klauzule obsahuje dvojici opačných literálů. Výrok v DNF je splnitelný, právě když aspoň jedna jeho elementární konjunkce neobsahuje dvojici opačných literálů.

Převod tabulkou

Tvrzení Necht' $K \subseteq \mathbb{P}^2$ pro \mathbb{P} konečné. Označme $\bar{K} = \mathbb{P}^2 \setminus K$. Pak

$$M^{\mathbb{P}}\left(\bigvee_{v \in K} \bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}\right) = K = M^{\mathbb{P}}\left(\bigwedge_{v \in \bar{K}} \bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}\right)$$

Důkaz První rovnost plyne z $\bar{w}(\bigwedge_{p \in \mathbb{P}} p^{v(p)}) = 1$ právě když $w = v$, kde $w \in \mathbb{P}^2$. Druhá obdobně z $\bar{w}(\bigvee_{p \in \mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}) = 1$ právě když $w \neq v$. \square

Např. $K = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ namodelujeme

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \sim \\ (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Důsledek Každý výrok je ekvivalentní nějakému výroku v CNF/DNF.

Důkaz Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných, kterých je konečně. Lze tedy použít tvrzení pro $K = M^{\mathbb{P}}(\varphi)$ a $\mathbb{P} = \text{var}(\varphi)$. \square

Převod úpravami

Tvrzení Necht' φ' je výrok vzniklý z výroku φ nahrazením některých výskytů podvýroku ψ za výrok ψ' . Jestliže $\psi \sim \psi'$, pak $\varphi \sim \varphi'$.

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. \square

$$(1) (\varphi \rightarrow \psi) \sim (\neg\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \leftrightarrow \psi) \sim ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi))$$

$$(2) \neg\neg\varphi \sim \varphi, \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \sim (\neg\varphi \vee \neg\psi), \quad \neg(\varphi \vee \psi) \sim (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

$$(3) (\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\psi \wedge \chi) \vee \varphi) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$$

$$(3)' (\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\psi \vee \chi) \wedge \varphi) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$$

Tvrzení Každý výrok lze pomocí (1), (2), (3)/(3)' převést na CNF / DNF.

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. \square

Tvrzení Necht' výrok φ obsahuje pouze spojky \neg , \wedge , \vee . Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou \wedge a \vee a znegováním všech literálů platí $\neg\varphi \sim \varphi^*$.

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. \square

Problém splnitelnosti a řešiče

- Problém **SAT**: Je daná výroková formule splnitelná?
- *Příklad Lze šachovnici bez dvou protilehlých rohů perfektně pokrýt kostkami domina?*

Snadno vytvoříme výrokovou formuli, která je **splnitelná**, právě když to lze. Pak ji můžeme zkusit ověřit pomocí nějakého SAT řešiče.

- Nejlepší řešiče pro SAT: www.satcompetition.org.
- Obecnější otázka: *Lze celou matematiku převést do logických formulí?*
AI, strojové dokazování, **Peano: Formulario** (1895-1908), **Mizar system**
- *Proč to lidé (většinou) nedělají?*
Jak vyřešíme uvedený příklad *elegantněji*? V čem náš postup spočívá?

2-SAT

- Výrok je v ***k*-CNF**, je-li v CNF a každá jeho klauzule má **nejvýše** k literálů.
- ***k*-SAT** je následující problém (pro pevné $k > 0$)

INSTANCE: Výrok φ v k -CNF.

OTÁZKA: Je φ splnitelný?

Zatímco už pro $k = 3$ jde o **NP-úplný** problém, ukážeme, že 2-SAT lze řešit v **lineárním** čase (vzhledem k délce φ).

Vynecháme implementační detaily (výpočetní model, reprezentace v paměti) a využijeme následující znalosti, viz [ADS I].

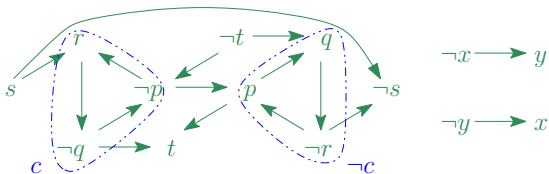
Tvrzení Rozklad orientovaného grafu (V, E) na silně souvislé komponenty lze nalézt v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

- Orientovaný graf G je **silně souvislý**, pokud pro každé dva vrcholy u a v existují v G orientované cesty jak z u do v , tak i z v do u .
- Silně souvislá **komponenta** grafu G je **maximální** silně souvislý podgraf G .

Implikační graf

Implikační graf výroku φ v 2-CNF je orientovaný graf G_φ , v němž

- vrcholy jsou proměnné výroku φ nebo jejich negace,
- klauzuli $l_1 \vee l_2$ výroku φ reprezentujeme dvojicí hran $\overline{l_1} \rightarrow l_2, \overline{l_2} \rightarrow l_1$,
- klauzuli l_1 výroku φ reprezentujeme hranou $\overline{l_1} \rightarrow l_1$.



$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (q \vee t) \wedge \neg s \wedge (x \vee y)$$

Tvrzení φ je splnitelný, právě když žádná silně souvislá komponenta v G_φ neobsahuje dvojici opačných literálů.

Důkaz Každé splňující ohodnocení ohodnotí všechny literály ze stejné komponenty stejně. Implikace zleva doprava tedy platí.

Nalezení ohodnocení

Naopak, označme G_φ^* graf vzniklý z G_φ **kontrakcí** silně souvislých komponent.

Pozorování G_φ^* je *acyklický*, má tedy *topologické uspořádání* $<$.

- Orientovaný graf je *acyklický*, neobsahuje-li orientovaný *cyklus*.
- Lineární uspořádání $<$ vrcholů orientovaného grafu je *topologické*, pokud $p < q$ pro každou hranu z p do q .

Nyní pro každou komponentu v rostoucím pořadí dle $<$, nejsou-li její literály dosud ohodnocené, nastav je na 0 a literály v opačné komponentě na 1.

Zbývá ukázat, že takto získané ohodnocení v splňuje φ . Kdyby ne, existovaly by v G_φ^* hrany $p \rightarrow q$ a $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$ s $v(p) = 1$ a $v(q) = 0$. To je ve sporu s pořadím nastavení komponent na 0 resp. 1, neboť $p < q$ a $\bar{q} < \bar{p}$. \square

Důsledek 2-SAT je řešitelný v lineárním čase.