Výroková a predikátová logika - II

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

Jazyk

Výroková logika je *"logikou spojek"*. Vycházíme z (neprázdné) množiny $\mathbb{P}$ *výrokových proměnných* (*prvovýroků*). Např.

$$\mathbb{P} = \{p, p_1, p_2, \ldots, q, q_1, q_2, \ldots\}$$

Obvykle budeme předpokládat, že $\mathbb{P}$ je spočetná.

Jazyk výrokové logiky (nad $\mathbb{P}$) obsahuje symboly

- výrokové proměnné z $\mathbb{P}$
- logické spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- závorky $($, $)$

Jazyk je tedy určen množinou $\mathbb{P}$. Říkáme, že logické spojky a závorky jsou *logické symboly*, zatímco výrokové proměnné jsou *mimologické symboly*.

Budeme používat i konstantní symboly $\top$ (pravda), $\bot$ (spor), jež zavedeme jako *zkratky* za $p \vee \neg p$, resp. $p \wedge \neg p$, kde p je pevný prvovýrok z $\mathbb{P}$.

Formule

Výrokové formule (*výroky*) (nad $\mathbb{P}$) jsou dány induktivním předpisem

(i) každá výroková proměnná z $\mathbb{P}$ je výrokovou formulí,

(ii) jsou-li φ, ψ výrokové formule, pak rovněž

$$(\neg\varphi)\ ,(\varphi \wedge \psi)\ ,(\varphi \vee \psi)\ ,(\varphi \to \psi)\ ,(\varphi \leftrightarrow \psi)$$

jsou výrokové formule,

(iii) každá výroková formule vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii).

- Výrokové formule jsou tedy (dobře vytvořené) konečné posloupnosti symbolů jazyka (řetězce).
- Výrokovou formuli, která je součástí jiné výrokové formule φ nazveme *podformulí* (*podvýrokem*) φ.
- Množinu všech výrokových formulí nad $\mathbb{P}$ značíme $\mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$.
- Množinu všech výrokových proměnných s výskytem ve φ značíme $\mathrm{var}(\varphi)$.

Konvence zápisu

Zavedení (obvyklých) *priorit* logických spojek umožňuje v zkráceném zápisu vypouštět závorky okolo podvýroku vzniklého spojkou s vyšší prioritou.

(1) $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

(2) $\wedge$, $\vee$

(3) $\neg$

Rovněž vnější závorky můžeme vynechat. Např.

$$(((\neg p) \wedge q) \rightarrow (\neg(p \vee (\neg q)))) \quad \text{lze zkrátit na} \quad \neg p \wedge q \rightarrow \neg(p \vee \neg q)$$

Poznámka Nerespektováním priorit může vzniknout nejednoznačný zápis nebo dokonce jednoznačný zápis neekvivalentní formule.

Další možnosti zjednodušení zápisu vyplývají ze sémantických vlastností spojek (asociativita $\vee$, $\wedge$).

Vytvořující strom

Vytvořující strom je konečný uspořádaný strom, jehož vrcholy jsou označeny výroky dle následujících pravidel

- listy (a jen listy) jsou označeny prvovýroky,
- je-li vrchol označen $(\neg\varphi)$, má jediného syna označeného φ,
- je-li vrchol označen $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ nebo $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, má dva syny, přičemž levý syn je označen φ a pravý je označen ψ.

Vytvořující strom výroku φ je vytvořující strom s kořenem označeným φ.

Tvrzení *Každý výrok má jednoznačně určený vytvořující strom.*

Důkaz Snadno indukcí dle počtu vnoření závorek (odpovídající hloubce vytvořujícího stromu). □

Poznámka Takovéto důkazy nazýváme důkazy indukcí dle struktury formule.

Sémantika

- Uvažujeme pouze dvouhodnotovou logiku.
- Prvovýroky reprezentují atomická tvrzení, jejich význam je určen přiřazením *pravdivostní hodnoty* 0 *(nepravda)* nebo 1 *(pravda)*.
- Sémantika logických spojek je dána jejich *pravdivostními tabulkami*.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ty jednoznačně určují hodnotu každého výroku z hodnot prvovýroků.

- K výrokům tedy můžeme také přiřadit *"pravdivostní tabulky"*. Říkáme, že reprezentují Booleovské funkce (až na určení pořadí proměnných).
- *Booleovská funkce* je n-ární operace na $\{0,1\}$, tj. $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Hodnota výroku

- *Ohodnocení* prvovýroků je funkce $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$.
- *Hodnota* $\overline{v}(\varphi)$ výroku φ při ohodnocení v je dána induktivně

$$\overline{v}(p) = v(p) \text{ jestliže } p \in \mathbb{P} \qquad \overline{v}(\neg\varphi) = -_1(\overline{v}(\varphi))$$
$$\overline{v}(\varphi \wedge \psi) = \wedge_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi)) \qquad \overline{v}(\varphi \vee \psi) = \vee_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi))$$
$$\overline{v}(\varphi \to \psi) = \to_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi)) \qquad \overline{v}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \leftrightarrow_1(\overline{v}(\varphi), \overline{v}(\psi))$$

kde $-_1, \wedge_1, \vee_1, \to_1, \leftrightarrow_1$ jsou Booleovské funkce dané tabulkami.

Tvrzení *Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení* $\mathrm{var}(\varphi)$.

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Poznámka Jelikož funkce $\overline{v}\colon \mathrm{VF}_{\mathbb{P}} \to \{0,1\}$ je jednoznačnou extenzí funkce v, můžeme psát v místo $\overline{v}$ aniž by došlo k nedorozumění.

Sémantické pojmy

Výrok φ nad $\mathbb{P}$ je

- *splněn* (*platí*) *při ohodnocení* $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$.
  Pak v je *splňující ohodnocení* výroku φ, značíme $v \models \varphi$.
- *pravdivý* ((logicky) *platí, tautologie*), pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$ pro každé $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, tj. φ je splněn při každém ohodnocení, značíme $\models \varphi$.
- *lživý* (*sporný*), pokud $\overline{v}(\varphi) = 0$ pro každé $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, tj. $\neg\varphi$ je pravdivý.

- *nezávislý*, pokud $\overline{v_1}(\varphi) = 0$ a $\overline{v_2}(\varphi) = 1$ pro nějaká $v_1, v_2\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, tj. φ není ani pravdivý ani lživý.
- *splnitelný*, pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$ pro nějaké $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, tj. φ není lživý.

Výroky φ a ψ jsou (logicky) *ekvivalentní*, psáno $\varphi \sim \psi$, pokud $\overline{v}(\varphi) = \overline{v}(\psi)$ pro každé $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$, tj. výrok $\varphi \leftrightarrow \psi$ je pravdivý.

Modely

Předchozí definice ekvivalentně přeformulujeme v terminologii modelů.

Model jazyka $\mathbb{P}$ je ohodnocení $v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$. Třída všech modelů jazyka $\mathbb{P}$ se značí $M(\mathbb{P})$, tedy $M(\mathbb{P}) = \{v \mid v\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}\} = {}^{\mathbb{P}}2$. Výrok φ nad $\mathbb{P}$ (je)

- *platí v modelu* $v \in M(\mathbb{P})$, pokud $\overline{v}(\varphi) = 1$. Pak v je *model výroku* φ, značíme $v \models \varphi$ a $M^{\mathbb{P}}(\varphi) = \{v \in M(\mathbb{P}) \mid v \models \varphi\}$ je *třída modelů* φ.
- *pravdivý* ((logicky) *platí, tautologie*), pokud platí v každém modelu (jazyka), značíme $\models \varphi$.
- *lživý* (*sporný*), pokud nemá model.
- *nezávislý*, pokud platí v nějakém modelu a neplatí v jiném.
- *splnitelný*, pokud má model.

Výroky φ a ψ jsou (logicky) *ekvivalentní*, psáno $\varphi \sim \psi$, pokud mají stejné modely.

Univerzálnost spojek

Jazyk výrokové logiky obsahuje *základní* spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Můžeme zavést obecně n-ární spojku pro libovolnou Booleovu funkci. Např.

$p \downarrow q$ *"ani p ani q"* (NOR, Peirceova spojka)

$p \uparrow q$ *"ne (p a q)"* (NAND, Shefferova spojka)

Množina spojek je *univerzální*, pokud lze každou Booleovskou funkci reprezentovat nějakým z nich (dobře) vytvořeným výrokem.

Tvrzení $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *je univerzální.*

Důkaz Funkci $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ reprezentuje výrok $\bigvee_{v \in f^{-1}[1]} \bigwedge_{i=1}^{n} p_i^{v_i}$, kde $p_i^{v_i}$ značí prvovýrok p_i pokud $v_i = 1$, jinak výrok $\neg p_i$. Pro $f^{-1}[1] = \emptyset$ zvolíme výrok $\bot$. □

Tvrzení $\{\neg, \rightarrow\}$ *je univerzální.*

Důkaz $(p \wedge q) \sim \neg(p \rightarrow \neg q)$, $(p \vee q) \sim (\neg p \rightarrow q)$. □

CNF a DNF

- *Literál* je prvovýrok nebo jeho negace. Je-li p prvovýrok, označme p^0 literál $\neg p$ a p^1 literál p. Je-li l literál, označme $\overline{l}$ literál *opačný* k l.
- *Klauzule* je disjunkce literálů, prázdnou klauzulí rozumíme $\bot$.
- Výrok je v *konjunktivně normálním tvaru* (*CNF*), je-li konjunkcí klauzulí. Prázdným výrokem v CNF rozumíme $\top$.
- *Elementární konjunkce* je konjunkce literálů, prázdnou konjunkcí je $\top$.
- Výrok je v *disjunktivně normálním tvaru* (*DNF*), je-li disjunkcí elementárních konjunkcí. Prázdným výrokem v DNF rozumíme $\bot$.

Poznámka Klauzule nebo elementární konjunkce je zároveň v CNF i DNF.

Pozorování *Výrok v CNF je pravdivý, právě když každá jeho klauzule obsahuje dvojici opačných literálů. Výrok v DNF je splnitelný, právě když aspoň jedna jeho elementární konjunkce neobsahuje dvojici opačných literálů.*

Převod tabulkou

Tvrzení *Nechť $K \subseteq {}^{\mathbb{P}}2$ pro $\mathbb{P}$ konečné. Označme $\overline{K} = {}^{\mathbb{P}}2 \setminus K$. Pak*

$$M^{\mathbb{P}}\Big(\bigvee_{v\in K}\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} p^{v(p)}\Big) = K = M^{\mathbb{P}}\Big(\bigwedge_{v\in\overline{K}}\bigvee_{p\in\mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}\Big)$$

Důkaz První rovnost plyne z $\overline{w}(\bigwedge_{p\in\mathbb{P}} p^{v(p)}) = 1$ právě když $w = v$, kde $w\colon \mathbb{P} \to \{0,1\}$. Druhá obdobně z $\overline{w}(\bigvee_{p\in\mathbb{P}} \overline{p^{v(p)}}) = 1$ právě když $w \neq v$. □

Např. $K = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ namodelujeme

$$(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \sim$$
$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

Důsledek *Každý výrok je ekvivalentní nějakému výroku v CNF/DNF.*

Důkaz Hodnota výroku φ závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných, kterých je konečně. Lze tedy použít tvrzení pro $K = M^{\mathbb{P}}(\varphi)$ a $\mathbb{P} = \mathrm{var}(\varphi)$. □

Převod úpravami

Tvrzení *Nechť φ' je výrok vzniklý z výroku φ nahrazením některých výskytů podvýroku ψ za výrok ψ'. Jestliže $\psi \sim \psi'$, pak $\varphi \sim \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

(1) $(\varphi \to \psi) \sim (\neg\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \sim ((\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi))$

(2) $\neg\neg\varphi \sim \varphi$, $\neg(\varphi \wedge \psi) \sim (\neg\varphi \vee \neg\psi)$, $\neg(\varphi \vee \psi) \sim (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

(3) $(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)) \sim ((\psi \wedge \chi) \vee \varphi) \sim ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi))$

(3)' $(\varphi \wedge (\psi \vee \chi)) \sim ((\psi \vee \chi) \wedge \varphi) \sim ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi))$

Tvrzení *Každý výrok lze pomocí $(1), (2), (3)/(3)'$ převést na CNF / DNF.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Tvrzení *Nechť výrok φ obsahuje pouze spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Pak pro výrok φ^* vzniklý z φ záměnou $\wedge$ a $\vee$ a znegováním všech literálů platí $\neg\varphi \sim \varphi^*$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule. □

Problém splnitelnosti a řešiče

- Problém SAT: Je daná výroková formule splnitelná?
- *Příklad* *Lze šachovnici bez dvou protilehlých rohů* perfektně *pokrýt kostkami domina?*

  Snadno vytvoříme výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když to lze. Pak ji můžeme zkusit ověřit pomocí nějakého SAT řešiče.
- Nejlepší řešiče pro SAT: `www.satcompetition.org`.
- Řešič v ukázce: `Glucose`, formát pro CNF soubory: `DIMACS`.
- Obecnější otázka: *Lze celou matematiku převést do logických formulí?*
  AI, strojové dokazování, Peano: *Formulario* (1895-1908), Mizar system
- *Proč to lidé (většinou) nedělají?*
  Jak vyřešíme uvedený příklad *elegantněji*? V čem náš postup spočívá?

2-SAT

- Výrok je v *k-CNF*, je-li v CNF a každá jeho klauzule má nejvýše k literálů.
- *k-SAT* je následující problém (pro pevné $k > 0$)

  INSTANCE: *Výrok φ v k-CNF.*

  OTÁZKA: *Je φ splnitelný?*

Zatímco už pro $k = 3$ jde o NP-úplný problém, ukážeme, že 2-SAT lze řešit v *lineárním* čase (vzhledem k délce φ).

Vynecháme implementační detaily (výpočetní model, reprezentace v paměti) a využijeme následující znalosti, viz [ADS I].

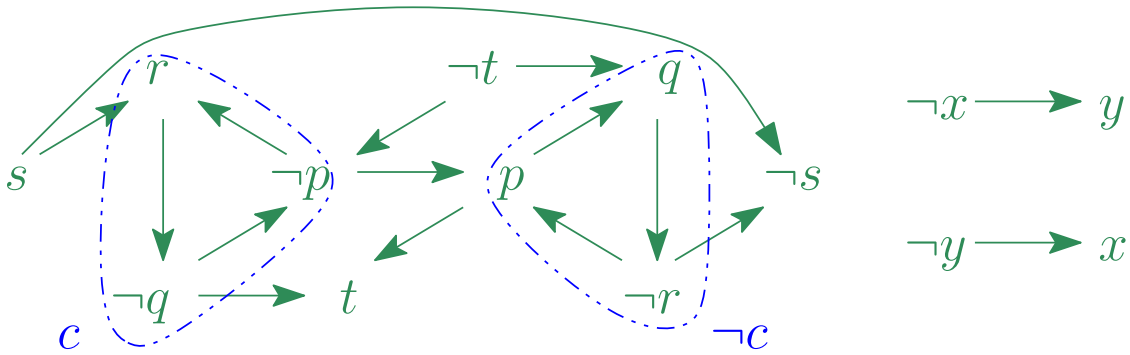
Tvrzení *Rozklad orientovaného grafu (V, E) na silně souvislé komponenty lze nalézt v čase $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.*

- Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy u a v existují v G orientované cesty jak z u do v, tak i z v do u.
- Silně souvislá *komponenta* grafu G je maximální silně souvislý podgraf G.

Implikační graf

Implikační graf výroku φ v 2-CNF je orientovaný graf G_φ, v němž

- vrcholy jsou proměnné výroku φ nebo jejich negace,
- klauzuli $l_1 \vee l_2$ výroku φ reprezentujeme dvojicí hran $\overline{l_1} \to l_2$, $\overline{l_2} \to l_1$,
- klauzuli l_1 výroku φ reprezentujeme hranou $\overline{l_1} \to l_1$.



$$p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee t) \wedge (q \vee t) \wedge \neg s \wedge (x \vee y)$$

Tvrzení *φ je splnitelný, právě když žádná silně souvislá komponenta v G_φ neobsahuje dvojici opačných literálů.*

Důkaz Každé splňující ohodnocení ohodnotí všechny literály ze stejné komponenty stejně. Implikace zleva doprava tedy platí.

Nalezení ohodnocení

Naopak, označme G^*_φ graf vzniklý z G_φ kontrakcí silně souvislých komponent.

Pozorování *G^*_φ je acyklický, má tedy topologické uspořádání $<$.*

- Orientovaný graf je *acyklický*, neobsahuje-li orientovaný *cyklus*.
- Lineární uspořádání $<$ vrcholů orientovaného grafu je *topologické*, pokud $p < q$ pro každou hranu z p do q.

Nyní pro každou komponentu v rostoucím pořadí dle $<$, nejsou-li její literály dosud ohodnocené, nastav je na 0 a literály v opačné komponentě na 1.

Zbývá ukázat, že takto získané ohodnocení v splňuje φ. Kdyby ne, existovaly by v G^*_φ hrany $p \to q$ a $\overline{q} \to \overline{p}$ s $v(p) = 1$ a $v(q) = 0$. To je ve sporu s pořadím nastavení komponent na 0 resp. 1, neboť $p < q$ a $\overline{q} < \overline{p}$. □

Důsledek *2-SAT je řešitelný v lineárním čase.*

Horn-SAT

- *Jednotková klauzule* je klauzule obsahující jediný literál,
- *Hornova klauzule* je klauzule obsahující nejvýše jeden pozitivní literál,

$$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n \vee q \quad \sim \quad (p_1 \wedge \cdots \wedge p_n) \to q$$

- *Hornův výrok* je konjunkcí Hornových klauzulí,
- *Horn-SAT* je problém splnitelnosti daného Hornova výroku.

Algoritmus

(1) *obsahuje-li* φ *dvojici jednotkových klauzulí* l *a* $\overline{l}$*, není splnitelný,*

(2) *obsahuje-li* φ *jednotkovou klauzuli* l*, nastav* l *na* 1*, odstraň všechny klauzule obsahující* l*, odstraň* $\overline{l}$ *ze všech klauzulí a opakuj od začátku,*

(3) *neobsahuje-li* φ *jednotkovou klauzuli, je splnitelný ohodnocením* 0 *všech zbývajících proměnných.*

Krok (2) se nazývá *jednotková propagace*.

Jednotková propagace

$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee s) \wedge s \qquad v(s) = 1$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg r \qquad v(\neg r) = 1$$
$$(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \qquad v(p) = v(q) = v(t) = 0$$

Pozorování *Nechť φ^l je výrok získaný z φ jednotkovou propagací. Pak φ^l je splnitelný, právě když φ je splnitelný.*

Důsledek *Algoritmus je korektní (řeší Horn-SAT).*

Důkaz Korektnost 1. kroku je zřejmá, v 2. kroku plyne z pozorování, v 3.kroku díky *Hornově tvaru*, neboť každá zbývající klauzule obsahuje negativní literál.

Poznámka Přímočará implementace vyžaduje kvadratický čas, při vhodné reprezentaci v paměti lze dosáhnout lineárního času (vzhledem k délce φ).