

Výroková a predikátová logika - III

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

Teorie

Neformálně, teorie je popis "světa", na který vymezujeme svůj diskurz.

- Výroková *teorie* nad jazykem \mathbb{P} je libovolná množina T výroků z $\text{VF}_{\mathbb{P}}$. Výrokům z T říkáme *axiomy* teorie T .
- *Model teorie* T nad \mathbb{P} je ohodnocení $v \in M(\mathbb{P})$ (tj. model jazyka), ve kterém platí všechny axiomy z T , značíme $v \models T$.
- *Třída modelů* T je $M^{\mathbb{P}}(T) = \{v \in M(\mathbb{P}) \mid v \models \varphi \text{ pro každé } \varphi \in T\}$.

Např. pro teorii $T = \{p, \neg p \vee \neg q, q \rightarrow r\}$ nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ je

$$M^{\mathbb{P}}(T) = \{(1, 0, 0), (1, 0, 1)\}$$

- Je-li teorie T konečná, lze ji *nahradit konjunkcí* jejích axiomů.
- Zápis $M(T, \varphi)$ značí $M(T \cup \{\varphi\})$.

Sémantika vzhledem k teorii

Sémantické pojmy zobecníme vzhledem k teorii, respektive k jejím modelům.

Nechť T je teorie nad \mathbb{P} . Výrok φ nad \mathbb{P} je

- **pravdivý v T** (*platí v T*), pokud platí v každém modelu T , značíme $T \models \varphi$.
Říkáme také, že φ je (sémantickým) **důsledkem** teorie T .
- **lživý v T** (*sporný v T*), pokud neplatí v žádném modelu teorie T ,
- **nezávislý v T** , pokud platí v nějakém modelu teorie T a neplatí v jiném,
- **splnitelný v T** (*konzistentní s T*), pokud platí v nějakém modelu T .

Výroky φ a ψ jsou **ekvivalentní v T** (*T -ekvivalentní*), psáno $\varphi \sim_T \psi$, pokud každý model teorie T je modelem φ právě když je modelem ψ .

Poznámka Jsou-li všechny axiomy teorie T pravdivé (tautologie), např. pro $T = \emptyset$, všechny pojmy vzhledem k T se shodují s původními (logickými) pojmy.

Důsledek teorie

Důsledek teorie T nad \mathbb{P} je množina $\theta^{\mathbb{P}}(T)$ všech výroků pravdivých v T , tj.

$$\theta^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \models \varphi\}.$$

Tvrzení Pro každé dvě teorie T, T' a výroky $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ nad \mathbb{P}

- (1) $T \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(T) = \theta^{\mathbb{P}}(\theta^{\mathbb{P}}(T))$,
- (2) $T \subseteq T' \Rightarrow \theta^{\mathbb{P}}(T) \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(T')$,
- (3) $\varphi \in \theta^{\mathbb{P}}(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \Leftrightarrow \models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \rightarrow \varphi$.

Důkaz Snadno z definic, neboť $T \models \varphi \Leftrightarrow M(T) \subseteq M(\varphi)$ a navíc

- (1) $M(\theta(T)) = M(T)$,
- (2) $T \subseteq T' \Rightarrow M(T') \subseteq M(T)$,
- (3) $\models \psi \rightarrow \varphi \Leftrightarrow M(\psi) \subseteq M(\varphi), M(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) = M(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. □

Vlastnosti teorií

Výroková teorie T nad \mathbb{P} je (*sémanticky*)

- *sporná*, jestliže v ní platí \perp (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každý výrok je v ní pravdivý či lživý, tj. žádný výrok v ní není nezávislý,
- *extenze* teorie T' nad \mathbb{P}' , jestliže $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ a $\theta^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \theta^{\mathbb{P}}(T)$,
o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, a *konzervativní*, pokud $\theta^{\mathbb{P}'}(T') = \theta^{\mathbb{P}}(T) \cap \text{VF}_{\mathbb{P}'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T' , jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T ,

Pozorování Necht' T a T' jsou teorie nad \mathbb{P} . Teorie T je (*sémanticky*)

- (1) *bezesporná*, právě když má model,
- (2) *kompletní*, právě když má jediný model,
- (3) *extenze* T' , právě když $M^{\mathbb{P}}(T) \subseteq M^{\mathbb{P}}(T')$,
- (4) *ekvivalentní* s T' , právě když $M^{\mathbb{P}}(T) = M^{\mathbb{P}}(T')$.

Algebra výroků

Nechť T je bezesporná teorie nad \mathbb{P} . Na množině $\text{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T$ lze zadefinovat operace $\neg, \wedge, \vee, \perp, \top$ (korektně) pomocí reprezentantů, např.

$$[\varphi]_{\sim_T} \wedge [\psi]_{\sim_T} = [\varphi \wedge \psi]_{\sim_T}$$

Pak $AV^{\mathbb{P}}(T) = \langle \text{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T, \neg, \wedge, \vee, \perp, \top \rangle$ je **algebra výroků** vzhledem k T .

Jelikož $\varphi \sim_T \psi \Leftrightarrow M(T, \varphi) = M(T, \psi)$, je $h([\varphi]_{\sim_T}) = M(T, \varphi)$ korektně definovaná prostá funkce $h: \text{VF}_{\mathbb{P}}/\sim_T \rightarrow \mathcal{P}(M(T))$ a platí

$$h(\neg[\varphi]_{\sim_T}) = M(T) \setminus M(T, \varphi)$$

$$h([\varphi]_{\sim_T} \wedge [\psi]_{\sim_T}) = M(T, \varphi) \cap M(T, \psi)$$

$$h([\varphi]_{\sim_T} \vee [\psi]_{\sim_T}) = M(T, \varphi) \cup M(T, \psi)$$

$$h([\perp]_{\sim_T}) = \emptyset, \quad h([\top]_{\sim_T}) = M(T)$$

Navíc h je *na*, pokud $M(T)$ je *konečná*.

Důsledek Je-li T bezesporná nad konečnou \mathbb{P} , je $AV^{\mathbb{P}}(T)$ **Booleova algebra** *izomorfní* s (konečnou) **potenční algebrou** $\underline{\mathcal{P}}(M(T))$ via h .

Analýza teorií nad konečně prvovýroky

Nechť T je bezesporná teorie nad \mathbb{P} , kde $|\mathbb{P}| = n \in \mathbb{N}^+$ a $m = |M^{\mathbb{P}}(T)|$. Pak

- neekvivalentních výroků (popř. teorií) nad \mathbb{P} je 2^{2^n} ,
- neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} pravdivých (lživých) v T je $2^{2^n - m}$,
- neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} nezávislých v T je $2^{2^n} - 2 \cdot 2^{2^n - m}$,
- neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T je 2^m , z toho sporná 1 ,
- neekvivalentních kompletních jednoduchých extenzí teorie T je m ,
- T -neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} je 2^m ,
- T -neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} pravdivých (lživých) (v T) je 1 ,
- T -neekvivalentních výroků nad \mathbb{P} nezávislých (v T) je $2^m - 2$.

Důkaz Díky bijekci $\text{VF}_{\mathbb{P}} / \sim$ resp. $\text{VF}_{\mathbb{P}} / \sim_T$ s $\mathcal{P}(M(\mathbb{P}))$ resp. $\mathcal{P}(M^{\mathbb{P}}(T))$ stačí zjistit počet podmnožin s vhodnou vlastností. \square

Formální dokazovací systémy

Naším cílem je přesně formalizovat pojem důkazu jako *syntaktické procedury*.

Ve (*standardních*) formálních dokazovacích systémech,

- důkaz je *konečný* objekt, může vycházet z axiomů dané *teorie*,
- $T \vdash \varphi$ značí, že φ je *dokazatelná* z T ,
- pokud důkaz dané formule existuje, lze ho nalézt “*algoritmicky*”,
(Je-li T “*rozumně zadaná*”).

Od formálního dokazovacího systému obvykle očekáváme, že bude

- *korektní*, tj. každá formule φ dokazatelná z teorie T je v T pravdivá,
- nejlépe i *úplný*, tj. každá formule φ pravdivá v T je z T dokazatelná.

Příklady formálních dokazovacích systémů (kalkulů): *tablo metody*,
Hilbertovské systémy, *Gentzenovy systémy*, *systémy přirozené dedukce*.

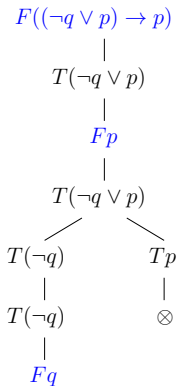
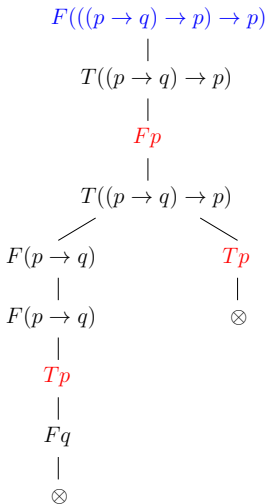
Tablo metoda - úvod

Budeme předpokládat, že jazyk je pevný a **spočetný**, tj. množina prvovýroků \mathbb{P} je spočetná. Pak každá **teorie** nad \mathbb{P} je **spočetná**.

Hlavní rysy tablo metody (*neformálně*)

- **tablo** pro danou formuli φ je binární značkový strom reprezentující vyhledávání **protipříkladu** k φ , tj. modelu teorie, ve kterém φ neplatí,
- formule má **důkaz**, pokud každá větev příslušného tabla **selže**, tj. nebyl nalezen protipříklad, v tom případě bude (systematické) tablo **konečné**,
- pokud protipříklad existuje, v (dokončeném) tablu bude větev, která ho poskytuje, tato větev může být i **nekonečná**.

Úvodní příklady



Komentář k příkladům

Vrcholy tabla jsou značeny *položkami*. Položka je formule s *příznakem* T / F , který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu *platí* / *neplatí*. Je-li tento předpoklad u položky správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.

V obou příkladech jde o *dokončená* (systematická) tabla z prázdné teorie.

- Vlevo je *tablo důkaz* pro $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$. Všechny větve tabla “*selhaly*”, značeno \otimes , neboť je na nich dvojice $T\varphi, F\varphi$ pro nějaké φ (*protipříklad tedy nelze nalézt*). Formule má důkaz, píšeme

$$\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$$

- Vpravo je (dokončené) tablo pro $(\neg q \vee p) \rightarrow p$. Levá větev “*neselhala*” a je *dokončená* (není třeba v ní pokračovat) (*ta poskytuje protipříklad* $v(p) = v(q) = 0$).

Atomická tabla

Atomické tablo je jeden z následujících (položkami značkovaných) stromů, kde p je libovolná výroková proměnná a φ, ψ jsou libovolné výrokové formule.

Tp	Fp	$ \begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\ \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array} $	$ \begin{array}{c} F(\varphi \wedge \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad F\psi \end{array} $	$ \begin{array}{c} T(\varphi \vee \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad T\psi \end{array} $	$ \begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\ \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array} $
$ \begin{array}{c} T(\neg\varphi) \\ \\ F\varphi \end{array} $	$ \begin{array}{c} F(\neg\varphi) \\ \\ T\varphi \end{array} $	$ \begin{array}{c} T(\varphi \rightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ F\varphi \quad T\psi \end{array} $	$ \begin{array}{c} F(\varphi \rightarrow \psi) \\ \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array} $	$ \begin{array}{c} T(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\psi \\ \quad \quad \\ T\psi \quad F\psi \end{array} $	$ \begin{array}{c} F(\varphi \leftrightarrow \psi) \\ / \quad \backslash \\ T\varphi \quad F\psi \\ \quad \quad \\ F\psi \quad T\psi \end{array} $

Pomocí atomických tabel a pravidel, jak tabla rozvinout (prodloužit), formálně zadefinujeme všechna tabla (popíšeme jejich konstrukci).

Tablo

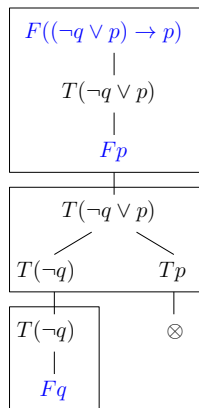
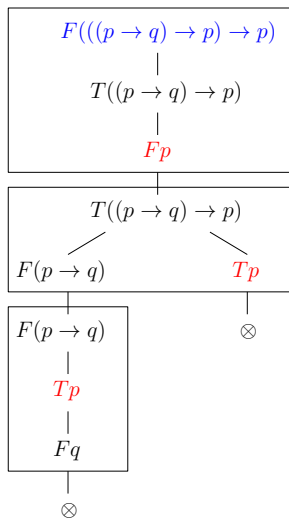
Konečné tablo je binární, položkami značkovaný strom daný předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla τ a τ' vznikne z τ **připojením** atomického tabla pro P na **konec větve** V , je τ' rovněž konečné tablo,
- (iii) každé konečné tablo vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii).

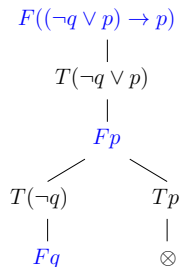
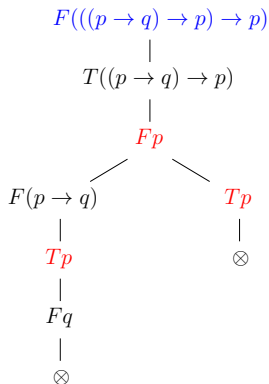
Tablo je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ (konečná i nekonečná) konečných tabel takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí pravidla (ii), formálně $\tau = \cup \tau_n$.

Poznámka Není předepsané, jak položku P a větev V pro krok (ii) vybírat. To specifikujeme až v **systematických** tablech.

Konstrukce tabla



Konvence



Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větvi znovu **zobrazovat**.

Poznámka Její zopakování bude potřeba později v predikátové logice.

Tablo důkaz

Nechť P je položka na větvi V tabla τ . Řekneme, že

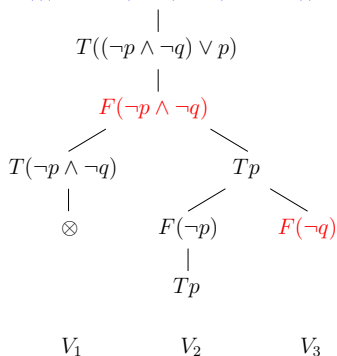
- položka P je *redukována* na V , pokud se na V **vyskytuje** jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k jejímu rozvoji na V ,
- větev V je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou formuli φ , jinak je *bezesporná*. Větev V je *dokončená*, je-li sporná nebo je každá její položka redukována na V ,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená, a je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.

Tablo důkaz (*důkaz tablem*) výrokové formule φ je **sporné tablo** s položkou $F\varphi$ v kořeni. φ je (*tablo*) *dokazatelná*, píšeme $\vdash \varphi$, má-li tablo důkaz.

Obdobně, *zamítnutí* formule φ *tablem* je **sporné tablo** s položkou $T\varphi$ v kořeni. Formule φ je (*tablo*) *zamítnutelná*, má-li zamítnutí tablem, tj. $\vdash \neg\varphi$.

Příklady

$$F(((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$$

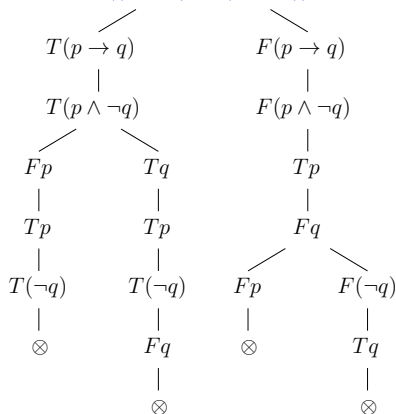


a)

a) $F(\neg p \wedge \neg q)$ neredukovaná na V_1 , V_1 sporná, V_2 je dokončená, V_3 není,

b) zamítnutí tablem výrokové formule $\varphi: (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$, tedy $\vdash \neg \varphi$.

$$T((p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q))$$



b)

Tablo z teorie

Jak do důkazu přidat axiomy dané teorie T ?

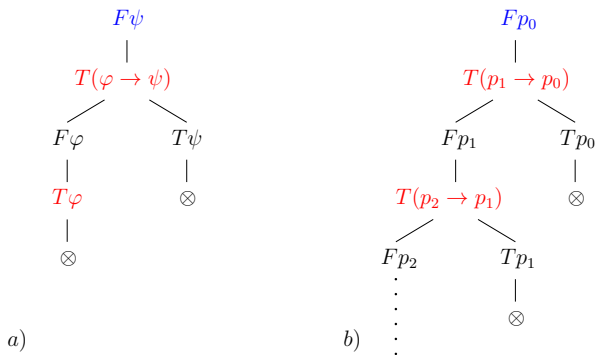
Konečné tablo z teorie T je **zobecnění** konečného tabla přidáním pravidla (ii)' je-li V větev konečného tabla (z T) a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec V vznikne (také) konečné tablo z T .

Přidáním dodatku “z teorie T ” přirozeně zobecníme další pojmy

- **tablo z teorie T** je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (ii)', formálně $\tau = \cup \tau_n$,
- **tablo důkaz** formule φ z teorie T je sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni, Má-li φ tablo důkaz z T , je **(tablo) dokazatelná z T** , píšeme $T \vdash \varphi$.
- **zamítnutí** formule φ **tablem z teorie T** je sporné tablo z T s $T\varphi$ v kořeni.

Narozdíl od předchozích definic, u tabla z teorie T je větev V **dokončená**, je-li sporná, nebo je každá její položka redukovaná na V a **navíc** obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$.

Příklady tabla z teorie



a) Tablo **důkaz** formule ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}$, tedy $T \vdash \psi$.

b) **Dokončené** tablo pro formuli p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \rightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Všechny větve jsou dokončené, nejlevější větev je **bezesporná** a nekonečná. Poskytuje (jediný) model teorie T , ve kterém p_0 neplatí.