

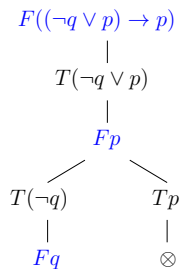
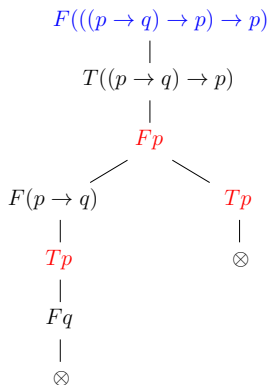
Výroková a predikátová logika - IV

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

Tablo - příklady



Atomická tabla

Atomické tablo je jeden z následujících (položkami značkovaných) stromů, kde p je libovolná výroková proměnná a φ, ψ jsou libovolné výrokové formule.

Tp	Fp	$T(\varphi \wedge \psi)$ $\begin{array}{c} \\ T\varphi \\ \\ T\psi \end{array}$	$F(\varphi \wedge \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$T(\varphi \vee \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$F(\varphi \vee \psi)$ $\begin{array}{c} \\ F\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$
$T(\neg\varphi)$ $\begin{array}{c} \\ F\varphi \end{array}$	$F(\neg\varphi)$ $\begin{array}{c} \\ T\varphi \end{array}$	$T(\varphi \rightarrow \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$F(\varphi \rightarrow \psi)$ $\begin{array}{c} \\ T\varphi \\ \\ F\psi \end{array}$	$T(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ T\varphi & F\varphi \\ & \\ T\psi & F\psi \end{array}$	$F(\varphi \leftrightarrow \psi)$ $\begin{array}{cc} / & \backslash \\ T\varphi & F\varphi \\ & \\ F\psi & T\psi \end{array}$

Tablo z teorie

Jak do důkazu přidat axiomy dané teorie?

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkový strom daný předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla τ a τ' vznikne z τ **připojením** atomického tabla pro P na **konec větve** V , je τ' rovněž konečné tablo,
- (ii)' je-li V větev konečného tabla ($z T$) a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec V vznikne (rovněž) konečné tablo z T .
- (iii) každé konečné tablo vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (ii)'.

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí pravidla (ii) či (ii)', formálně $\tau = \cup \tau_n$.

Tablo důkaz z teorie

Nechť P je položka na větvi V tabla τ z teorie T . Řekneme, že

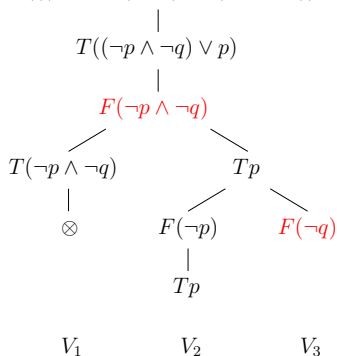
- položka P je *redukována* na V , pokud se na V **vyskytuje** jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k jejímu rozvoji na V ,
- větev V je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou formuli φ ,
- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo je každá její položka redukována na V a **navíc** obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená, a je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.

Tablo důkaz formule φ z teorie T je sporné tablo z T s $F\varphi$ v kořeni, Má-li φ tablo důkaz z T , je *(tablo) dokazatelná z T* , píšeme $T \vdash \varphi$.

Zamítnutí formule φ *tablem z teorie T* je sporné tablo z T s $T\varphi$ v kořeni. Formule φ je *(tablo) zamítnutelná z T* , má-li zamítnutí tablem z T , tj. $T \vdash \neg\varphi$.

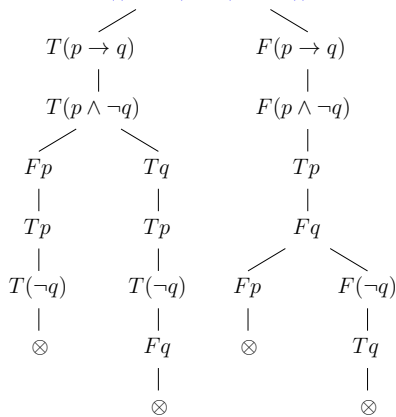
Příklady

$$F(((\neg p \wedge \neg q) \vee p) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$$



a)

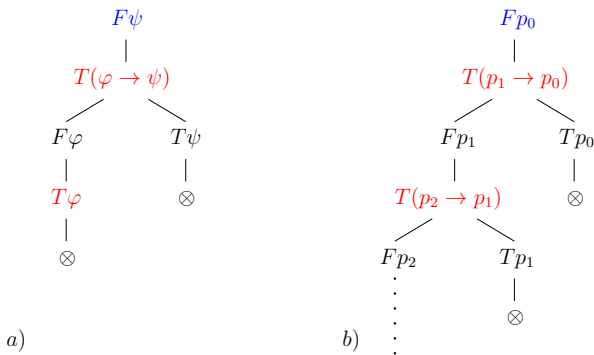
$$T((p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q))$$



b)

- a) $F(\neg p \wedge \neg q)$ neredukovaná na V_1 , V_1 sporná, V_2 je dokončená, V_3 není,
 b) zamítnutí tablem výrokové formule $\varphi: (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$, tedy $\vdash \neg\varphi$.

Příklady tabla z teorie



- a) Tablo **důkaz** formule ψ z teorie $T = \{\varphi, \varphi \rightarrow \psi\}$, tedy $T \vdash \psi$.
- b) **Dokončené** tablo pro formuli p_0 z teorie $T = \{p_{n+1} \rightarrow p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Všechny větve jsou dokončené, nejlevější větev je **bezesporná** a nekonečná. Poskytuje (jediný) model teorie T , ve kterém p_0 neplatí.

Systematické tablo

Popíšeme systematickou konstrukci, jež povede vždy k **dokončenému** tablu.

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

- (1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R . Dokud to lze, aplikuj následující kroky.
- (2) Nechť P je **nejlevější** položka v co **nejmenší** úrovni již daného tabla τ_n , která není redukována na nějaké bezesporné větvi procházející **skrze** P .
- (3) Za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze P . (Neexistuje-li P , vezmi $\tau'_n = \tau_n$.)
- (4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n , vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z teorie T pro položku R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup \tau_n$.

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ **dokončené**.

Důkaz Necht' $\tau = \cup \tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni.

- Je-li větev v v τ bezesporná, je i každý její prefix v v τ_n bezesporný.
- Je-li položka P neredukovaná na větvi v v τ , je neredukovaná na každém jejím prefixu v v τ_n (na němž leží).
- Do úrovně každé položky P (včetně její) je v τ jen konečně položek.
- Kdyby P byla neredukovaná na nějaké bezesporné větvi τ , přišla by na ní řada v nějakém kroku (2) a byla by zredukována krokem (3).
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. \square

Konečnost důkazů

Lemma (König) Každý nekonečný, konečně větvící se strom obsahuje nekonečnou větev.

Tvrzení Je-li $\tau = \cup \tau_n$ sporné tablo, je τ_n sporné **konečné** tablo pro nějaké n .

Důkaz

- Nechť S je množina vrcholů stromu τ , jenž nad sebou neobsahují spor, tj. mezi předky nemají dvojici $T\varphi, F\varphi$ pro žádné φ .
- Kdyby S byla nekonečná, dle **Königova lemmatu** by podstrom τ na vrcholech S obsahoval nekonečnou větev, tedy by τ nebylo sporné tablo.
- Jelikož je S konečné, všechny vrcholy z S leží do úrovně m pro nějaké m .
- Tedy každý vrchol v úrovni $m + 1$ má nad sebou spor. Zvolme n tak, že τ_n se shoduje s τ do úrovně $m + 1$. Pak každá větev v τ_n je sporná. \square

Důsledek Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.

Důkaz Při jeho konstrukci se prodlužují jen bezesporné větve. \square

Korektnost

Řekneme, že položka P se **shoduje** s ohodnocením v , pokud P je $T\varphi$ a $\bar{v}(\varphi) = 1$ nebo pokud P je $F\varphi$ a $\bar{v}(\varphi) = 0$. Větev V tabla se shoduje s v , shoduje-li se s v každá položka na V .

Lemma *Nechť v je model teorie T , který se shoduje s položkou v kořeni tabla $\tau = \cup \tau_n$ z T . Pak v tablu τ existuje větev shodující se s v .*

Důkaz Indukcí nalezneme posloupnost V_0, V_1, \dots takovou, že pro každé n je V_n větev v τ_n shodující se s v a V_n je obsažena ve V_{n+1} .

- Ověřením atomických tabel snadno zjistíme, že základ indukce platí.
- Pokud τ_{n+1} vznikne z τ_n bez prodloužení V_n , položme $V_{n+1} = V_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, nechť V_{n+1} je tato větev. Jelikož v je model φ , shoduje se V_{n+1} s v .
- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n . Jelikož se P shoduje s v a tvrzení platí pro atomická tabla, lze požadovanou větev V_{n+1} v τ_{n+1} nalézt. \square

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je *korektní*.

Věta Pro každou teorii T a formuli φ , je-li φ tablo dokazatelná z T , je φ pravdivá v T , tj. $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Důkaz

- Nechť φ je tablo dokazatelná z teorie T , tj. existuje sporné tablo τ s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T , tj. existuje model ν teorie T , ve kterém φ neplatí (**protipříklad**).
- Jelikož se položka $F\varphi$ shoduje s ν , dle předchozího lemmatu v tablu τ existuje větev shodující se s ν .
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi, F\psi$ pro nějaké ψ . \square

Úplnost

Ukážeme, že bezesporná větev v dokončeném tablu poskytuje *protipříklad*.

Lemma Necht' V je *bezesporná* větev *dokončeného* tablu τ . Pro následující ohodnocení v výrokových proměnných platí, že V se *shoduje* s v .

$$v(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud se } Tp \text{ vyskytuje na } V \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Důkaz Indukcí dle struktury formule v položce vyskytující se na V .

- Je-li položka Tp na V , kde p je prvovýrok, je $\bar{v}(p) = 1$ dle definice v .
- Je-li položka Fp na V , není Tp na V , jinak by V byla sporná, tedy $\bar{v}(p) = 0$ dle definice v .
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V , je $T\varphi$ a $T\psi$ na V , neboť τ je dokončené. Dle indukčního předpokladu je $\bar{v}(\varphi) = \bar{v}(\psi) = 1$, tedy $\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = 1$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V , je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V , neboť τ je dokončené. Dle indukčního předpokladu je $\bar{v}(\varphi) = 0$ nebo $\bar{v}(\psi) = 0$, tedy $\bar{v}(\varphi \wedge \psi) = 0$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech. □

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve výrokové logice je i **úplná**.

Věta Pro každou teorií T a formuli φ , je-li φ pravdivá v T , je φ tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T . Ukážeme, že libovolné **dokončené** tablo (např. **systematické**) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je **sporné**.

- Kdyby ne, nechť V je nějaká bezesporná větev tabla τ .
- Dle předchozího lemmatu existuje ohodnocení v prvovýroků takové, že V se shoduje s v , speciálně s $F\varphi$, tj. $\bar{v}(\varphi) = 0$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy v je modelem teorie T (neboť větev V se shoduje s v).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T .

Tedy tablo τ je důkazem φ z T . \square

Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie nad \mathbb{P} . Je-li φ dokazatelná z T , řekneme, že φ je **věta** (*teorém*) teorie T . Množinu vět teorie T označme

$$\text{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \{\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}} \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- **sporná**, jestliže je v T dokazatelný \perp (spor), jinak je **bezesporná**,
- **kompletní**, jestliže není sporná a každá formule je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$ pro každé $\varphi \in \text{VF}_{\mathbb{P}}$,
- **extenze** teorie T' nad \mathbb{P}' , jestliže $\mathbb{P}' \subseteq \mathbb{P}$ a $\text{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') \subseteq \text{Thm}^{\mathbb{P}}(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je **jednoduchá**, pokud $\mathbb{P} = \mathbb{P}'$, a **konzervativní**, pokud $\text{Thm}^{\mathbb{P}'}(T') = \text{Thm}^{\mathbb{P}}(T) \cap \text{VF}_{\mathbb{P}'}$,
- **ekvivalentní** s teorií T' , jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T .

Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek Pro každou teorii T a formule φ, ψ nad \mathbb{P} ,

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$,
- $\text{Thm}^{\mathbb{P}}(T) = \theta^{\mathbb{P}}(T)$,
- T je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,
- T je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má právě jeden model,
- $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (Věta o dedukci).

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

Věta o kompaktnosti

Věta *Teorie má model, právě když každá její **konečná** část má model.*

Důkaz 1 Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný \perp systematickým tablem τ . Jelikož je τ konečné, je \perp dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. \square

Poznámka *Tento důkaz je založen na konečnosti důkazu, korektnosti a úplnosti. Uved'me ještě druhý, přímý důkaz (pomocí **Königova lemmatu**).*

Důkaz 2 Necht' $T = \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Uvažme strom S na konečných binárních posloupnostech σ uspořádaných prodloužením. Přičemž $\sigma \in S$, právě když existuje ohodnocení v **prodlužující** σ takové, že $v \models \varphi_i$ pro každé $i \leq \text{lth}(\sigma)$.

Pozorování *S má nekonečnou větev, právě když T má model.*

Jelikož $\{\varphi_i \mid i \in n\} \subseteq T$ má model pro každé $n \in \mathbb{N}$, bude každá úroveň v S neprázdná. Tedy S je nekonečný, navíc binární, a dle Königova lemmatu obsahuje nekonečnou větev. \square

Aplikace kompaktnosti

Graf (V, E) je *k -obarvitelný*, pokud existuje $c: V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ takové, že $c(u) \neq c(v)$ pro každou hranu $\{u, v\} \in E$.

Věta *Spočetně nekonečný graf $G = (V, E)$ je k -obarvitelný, právě když každý jeho konečný podgraf je k -obarvitelný.*

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Necht' každý konečný podgraf v G je k -obarvitelný. Vezměme $\mathbb{P} = \{p_{u,i} \mid u \in V, 1 \leq i \leq k\}$ a teorii T s axiomy

$$\begin{array}{ll}
 p_{u,1} \vee \dots \vee p_{u,k} & \text{pro všechna } u \in V, \\
 \neg(p_{u,i} \wedge p_{u,j}) & \text{pro všechna } u \in V, 1 \leq i < j \leq k, \\
 \neg(p_{u,i} \wedge p_{v,i}) & \text{pro všechna } \{u, v\} \in E, 1 \leq i \leq k.
 \end{array}$$

Platí, že G je k -obarvitelný, právě když T má model. Dle věty o kompaktnosti stačí dokázat, že každá konečná $T' \subseteq T$ má model. Necht' G' je podgraf na vrcholech u takových, že $p_{u,i}$ se vyskytuje v T' pro nějaké i . Jelikož G' je k -obarvitelný dle předpokladu, má T' model. \square

Hilbertovský kalkul

- základní logické spojky: \neg , \rightarrow (ostatní z nich odvozené)
- logické axiomy** (schémata logických axiomů):

$$(i) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(ii) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(iii) \quad (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

kde φ , ψ , χ jsou libovolné formule (daného jazyka).

- odvozovací pravidlo:**

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad (\text{modus ponens})$$

Důkaz (Hilbertova stylu) formule φ v teorii T je **konečná** posloupnost

$\varphi_0, \dots, \varphi_n = \varphi$ formulí taková, že pro každé $i \leq n$

- φ_i je logický axiom nebo $\varphi_i \in T$ (axiom teorie), nebo
- φ_i lze odvodit z předchozích formulí pomocí odvozovacího pravidla.

Poznámka Volba axiomů a odvozovacích pravidel se v může v různých dokazovacích systémech Hilbertova stylu lišit.

Příklad a korektnost

Formule φ je **dokazatelná** v T , má-li důkaz z T , značíme $T \vdash_H \varphi$.

Je-li $T = \emptyset$, značíme $\vdash_H \varphi$. Např. pro $T = \{\neg\varphi\}$ je $T \vdash_H \varphi \rightarrow \psi$ pro každé ψ .

- | | | |
|----|---|-----------------------|
| 1) | $\neg\varphi$ | axiom z T |
| 2) | $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ | logický axiom (i) |
| 3) | $\neg\psi \rightarrow \neg\varphi$ | modus ponens z 1), 2) |
| 4) | $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ | logický axiom (iii) |
| 5) | $\varphi \rightarrow \psi$ | modus ponens z 3), 4) |

Věta Pro každou teorií T a formuli φ , $T \vdash_H \varphi \Rightarrow T \models \varphi$.

Důkaz

- Je-li $\varphi \in T$ nebo logický axiom, je $T \models \varphi$ (logické axiomy jsou tautologie),
- jestliže $T \models \varphi$ a $T \models \varphi \rightarrow \psi$, pak $T \models \psi$, tj. modus ponens je **korektní**,
- tedy každá formule vyskytující se v důkazu z T platí v T . □

Poznámka Platí i **úplnost**, tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash_H \varphi$ pro každou teorií T a formuli φ .