

# Výroková a predikátová logika - VI

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

# Predikátová logika

*Zabývá se tvrzeními o individuích, jejich vlastnostech a vztazích.*

*“Je inteligentní a její otec zná pana rektora.”*

$$I(x) \wedge Z(o(x), r)$$

- $x$  je **proměnná**, reprezentuje individuum,
- $r$  je **konstantní symbol**, reprezentuje konkrétní individuum,
- $o$  je **funkční symbol**, reprezentuje funkci,
- $I, Z$  jsou **relační (predikátové) symboly**, reprezentují relace (vlastnost “*být inteligentní*” a vztah “*znát*”).

*“Funkce  $f$  je na (surjektivní).”*

$$(\forall x)(\exists y)(f(y) = x)$$

- $(\forall x)$  je **všeobecný (univerzální) kvantifikátor** proměnné  $x$ ,
- $(\exists y)$  je **existenční kvantifikátor** proměnné  $y$ ,
- $=$  je (binární) **relační symbol**, reprezentuje identickou relaci.

# Jazyk

Jazyk 1. řádu obsahuje

- **proměnné**  $x, y, z, \dots, x_0, x_1, \dots$  (spočetně mnoho), množinu všech proměnných značíme **Var**,
- **funkční symboly**  $f, g, h, \dots$ , včetně **konstantních symbolů**  $c, d, \dots$ , což jsou nulární funkční symboly,
- **relační (predikátové) symboly**  $P, Q, R, \dots$ , případně symbol  $=$  (**rovnost**) jako speciální relační symbol,
- **kvantifikátory**  $(\forall x), (\exists x)$  pro každou proměnnou  $x \in \text{Var}$ ,
- **logické spojky**  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- **závorky**  $(, )$

Každý funkční i relační symbol  $S$  má danou **aritu** (**četnost**)  $\text{ar}(S) \in \mathbb{N}$ .

***Poznámka** Oproti výrokové logice nemáme (explicitně) výrokové proměnné, lze je zavést jako nulární relační symboly.*

# Signatura jazyka

- Proměnné, kvantifikátory, logické spojky a závorky jsou *logické symboly*, zatímco funkční a relační symboly (kromě případné rovnosti) jsou *mimologické symboly*. Rovnost (*obvykle*) uvažujeme zvlášť.
- *Signatura* je dvojice  $\langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  disjunktních množin relačních a funkčních symbolů s danými aritami, přičemž žádný z nich není rovnost. Signatura tedy určuje všechny mimologické symboly.
- *Jazyk* je dán signaturou  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a uvedením, zda jde o jazyk s rovností či bez rovnosti. Jazyk musí obsahovat alespoň jeden relační symbol (mimologický nebo rovnost).

*Poznámka* Význam symbolů není v jazyce určen, např. symbol  $+$  nemusí reprezentovat standardní sčítání.

## Příklady jazyků

*Jazyk obvykle uvádíme výčtem mimologických symbolů s případným upřesněním, zda jde o funkční či relační symboly a jakou mají aritu.*

Následující příklady jazyků jsou všechny s **rovností**.

- $L = \langle \rangle$  je jazyk **čisté** rovnosti,
- $L = \langle c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  je jazyk spočetně mnoha konstant,
- $L = \langle \leq \rangle$  je jazyk **uspořádání**,
- $L = \langle E \rangle$  je jazyk teorie **grafů**,
- $L = \langle +, -, 0 \rangle$  je jazyk teorie **grup**,
- $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  je jazyk teorie **těles**,
- $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  je jazyk **Booleových algeber**,
- $L = \langle S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  je jazyk **aritmetiky**,

kde  $c_i, 0, 1$  jsou konstantní symboly,  $S, -$  jsou unární funkční symboly,  $+, \cdot, \wedge, \vee$  jsou binární funkční symboly,  $E, \leq$  jsou binární relační symboly.

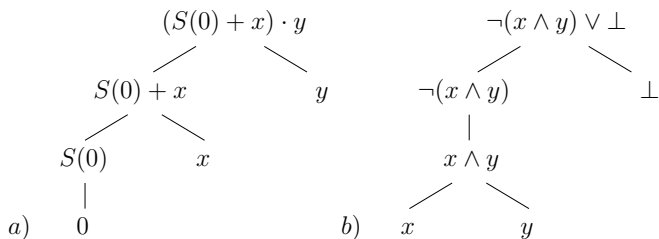
# Termy

Jsou výrazy reprezentující hodnoty (složených) funkcí.

**Termy** jazyka  $L$  jsou dány indukčním předpisem

- (i) každá proměnná nebo konstantní symbol je term,
  - (ii) je-li  $f$  funkční symbol jazyka  $L$  s aritou  $n > 0$  a  $t_1, \dots, t_n$  jsou termy, pak je i výraz  $f(t_1, \dots, t_n)$  term,
  - (iii) každý term vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii).
- **Konstantní (ground) term** je term bez proměnných, např.  $f(0) + 1$ .
  - Množinu všech termů jazyka  $L$  značíme  $\text{Term}_L$ .
  - Termu, jenž je součástí jiného termu  $t$ , říkáme **podterm** termu  $t$ .
  - Strukturu termu můžeme reprezentovat jeho **vytvěřujícím stromem**.
  - U binárních funkčních symbolů často používáme **infixního** zápisu, např. píšeme  $(x + y)$  namísto  $+(x, y)$ .

# Příklady termů



- a) Vytvořující strom termu  $(S(0) + x) \cdot y$  jazyka aritmetiky.
- b) Výrokové formule se spojkami  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ , případně s konstantami  $\top$ ,  $\perp$  lze chápat jako termy jazyka Booleových algeber.

# Atomické formule

*Jsou nejjednodušší formule.*

- **Atomická formule** jazyka  $L$  je výraz  $R(t_1, \dots, t_n)$ , kde  $R$  je  $n$ -ární relační symbol jazyka  $L$  a  $t_1, \dots, t_n$  jsou termy jazyka  $L$ .
- Množinu všech atomických formulí jazyka  $L$  značíme  $\text{AFm}_L$ .
- Strukturu atomické formule můžeme reprezentovat **vytvěřujícím stromem** z vytvářejících podstromů jejích termů.
- U binárních relačních symbolů často používáme **infixního** zápisu, např.  $t_1 = t_2$  namísto  $=(t_1, t_2)$  či  $t_1 \leq t_2$  namísto  $\leq(t_1, t_2)$ .
- *Příklady atomických formulí*

$$Z(o(x), r), \quad x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y, \quad \neg(x \wedge y) \vee \perp = \perp.$$



# Formule

**Formule** jazyka  $L$  jsou výrazy dané induktivním předpisem

- (i) každá atomická formule jazyka  $L$  je formule,
- (ii) jsou-li  $\varphi, \psi$  formule, pak i následující výrazy jsou formule  
 $(\neg\varphi), (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi),$
- (iii) je-li  $\varphi$  formule a  $x$  proměnná, jsou výrazy  $(\forall x)\varphi$  a  $(\exists x)\varphi$  formule.
- (iv) každá formule vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (iii).
  - Množinu všech formulí jazyka  $L$  značíme  $\mathbf{Fm}_L$ .
  - Formulí, jež je součástí jiné formule  $\varphi$ , nazveme **podformule** formule  $\varphi$ .
  - Strukturu formule můžeme reprezentovat jejím **vytvěřujícím stromem**.

# Konvence zápisu

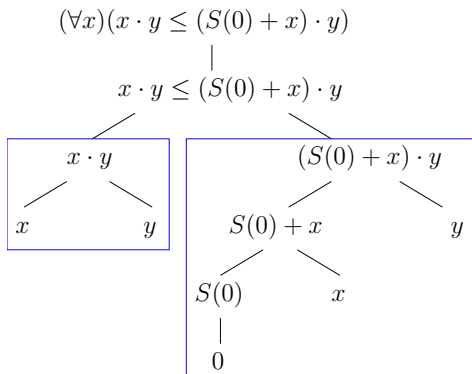
- Zavedení *priorit* binárních funkčních symbolů např.  $+$ ,  $\cdot$  umožňuje při *infixním* zápisu vypouštět závorky okolo podtermu vzniklého symbolem *vyšší* priority, např.  $x \cdot y + z$  reprezentuje term  $(x \cdot y) + z$ .
- Zavedení *priorit* logických spojek a kvantifikátorů umožňuje vypouštět závorky okolo podformule vzniklé spojkou s *vyšší* prioritou.

$$(1) \rightarrow, \leftrightarrow \quad (2) \wedge, \vee \quad (3) \neg, (\forall x), (\exists x)$$

- Okolo podformulí vzniklých  $\neg, (\forall x), (\exists x)$  lze závorky vypustit vždy.
- Můžeme vypustit závorky i okolo  $(\forall x)$  a  $(\exists x)$  pro každé  $x \in \text{Var}$ .
- Rovněž vnější závorky můžeme vynechat.

$$\begin{aligned} & (((\neg((\forall x)R(x))) \wedge ((\exists y)P(y))) \rightarrow (\neg(((\forall x)R(x)) \vee (\neg((\exists y)P(y))))) \\ & \neg(\forall x)R(x) \wedge (\exists y)P(y) \rightarrow \neg((\forall x)R(x) \vee \neg(\exists y)P(y)) \end{aligned}$$

# Příklad formule



Vytvořující strom formule  $(\forall x)(x \cdot y \leq (S(0) + x) \cdot y)$ .

# Výskyt proměnné

Nechť  $\varphi$  je formule a  $x$  je proměnná.

- **Výskyt** proměnné  $x$  ve  $\varphi$  je list vytvořujícího stromu  $\varphi$  označený  $x$ .
- Výskyt  $x$  ve  $\varphi$  je **vázaný**, je-li součástí nějaké podformule  $\psi$  začínající kvantifikátorem  $(\forall x)$  nebo  $(\exists x)$ . Není-li výskyt vázaný, je **volný**.
- Proměnná  $x$  je **volná** ve  $\varphi$ , pokud má volný výskyt ve  $\varphi$ .  
Je **vázaná** ve  $\varphi$ , pokud má vázaný výskyt ve  $\varphi$ .
- Proměnná  $x$  může být zároveň volná i vázaná ve  $\varphi$ . Např. ve formuli

$$(\forall x)(\exists y)(x \leq y) \vee x \leq z.$$

- Zápis  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  značí, že  $x_1, \dots, x_n$  jsou všechny volné proměnné ve formuli  $\varphi$ .

***Poznámka** Uvidíme, že pravdivostní hodnota formule (při dané interpretaci symbolů) závisí pouze na ohodnocení volných proměnných.*

# Otevřené a uzavřené formule

- Formule je *otevřená*, neobsahuje-li žádný kvantifikátor. Pro množinu  $OFm_L$  všech otevřených formulí jazyka  $L$  platí  $AFm_L \subsetneq OFm_L \subsetneq Fm_L$ .
- Formule je *uzavřená (sentence)*, pokud nemá žádnou volnou proměnnou, tj. všechny výskyty proměnných jsou vázané.
- Formule může být otevřená i uzavřená zároveň, pak všechny její termy jsou konstantní.

$x + y \leq 0$	<i>otevřená</i> , $\varphi(x, y)$
$(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 0)$	<i>uzavřená (sentence)</i> ,
$(\forall x)(x + y \leq 0)$	<i>ani otevřená, ani uzavřená</i> , $\varphi(y)$
$1 + 0 \leq 0$	<i>otevřená i uzavřená</i>

*Poznámka* Uvidíme, že *sentence* má při dané interpretaci symbolů pevný význam, tj. její pravdivostní hodnota nezávisí na ohodnocení proměnných.

# Instance

Když do formule za volnou proměnnou  $x$  **dosadíme** term  $t$ , požadujeme, aby vzniklá formule **říkala (nově) o termu  $t$  “totéž”,** co předtím říkala o proměnné  $x$ .

$\varphi(x)$	$(\exists y)(x + y = 1)$	“existuje prvek $1 - x$ ”
pro $t = 1$ lze $\varphi(x/t)$	$(\exists y)(1 + y = 1)$	“existuje prvek $1 - 1$ ”
pro $t = y$ nelze	$(\exists y)(y + y = 1)$	“1 je dělitelné 2”

- Term  $t$  je **substituovatelný** za proměnnou  $x$  ve formuli  $\varphi$ , pokud po současném nahrazení všech volných výskytů  $x$  za  $t$  nevznikne ve  $\varphi$  žádný vázaný výskyt proměnné  $z$   $t$ .
- Pak vzniklou formuli značíme  $\varphi(x/t)$  a zveme ji **instance** formule  $\varphi$  vzniklá **substitucí** termu  $t$  za proměnnou  $x$  do  $\varphi$ .
- $t$  není substituovatelný za  $x$  do  $\varphi$ , právě když  $x$  má volný výskyt v nějaké podformuli  $\varphi$  začínající  $(\forall y)$  nebo  $(\exists y)$  pro nějakou proměnnou  $y$  z  $t$ .
- **Konstantní** termy jsou substituovatelné vždy.

# Varianty

Kvantifikované proměnné lze (za *určitých* podmínek) přejmenovat tak, že vznikne ekvivalentní formule.

Nechť  $(Qx)\psi$  je podformule ve  $\varphi$ , kde  $Q$  značí  $\forall$  či  $\exists$ , a  $y$  je proměnná, tž.

- 1)  $y$  je **substituovatelná** za  $x$  do  $\psi$ , a
- 2)  $y$  nemá **volný** výskyt v  $\psi$ .

Nahrazením podformule  $(Qx)\psi$  za  $(Qy)\psi(x/y)$  vznikne **varianta** formule  $\varphi$  *v podformuli*  $(Qx)\psi$ . Postupnou variací jedné či více podformulí ve  $\varphi$  vznikne **varianta** formule  $\varphi$ . *Např.*

$$(\exists x)(\forall y)(x \leq y)$$

$$(\exists u)(\forall v)(u \leq v)$$

$$(\exists y)(\forall y)(y \leq y)$$

$$(\exists x)(\forall x)(x \leq x)$$

je formule  $\varphi$ ,

je varianta  $\varphi$ ,

není varianta  $\varphi$ , neplatí 1),

není varianta  $\varphi$ , neplatí 2).

# Struktury - příklady

- $S = \langle S, \leq \rangle$  **uspořádaná** množina, kde  $\leq$  je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní binární relace na  $S$ ,
- $G = \langle V, E \rangle$  neorientovaný **graf** bez smyček, kde  $V$  je množina *vrcholů*,  $E$  je ireflexivní, symetrická binární relace na  $V$  (*sousednost*),
- $\underline{\mathbb{Z}}_p = \langle \mathbb{Z}_p, +, -, 0 \rangle$  **grupa** sčítání celých čísel modulo  $p$ ,
- $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  **těleso** racionálních čísel.
- $\underline{\mathcal{P}}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$  **potenční algebra** nad množinou  $X$ ,
- $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$  standardní model **aritmetiky** (přirozených čísel),
- konečné automaty a další modely výpočtu,
- relační databáze, ...



# Struktura pro jazyk

Nechť  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  je jazyk a  $A$  je neprázdná množina.

- **Realizace (interpretace) relačního symbolu**  $R \in \mathcal{R}$  na  $A$  je libovolná relace  $R^A \subseteq A^{\text{ar}(R)}$ . Realizace rovnosti na  $A$  je relace  $Id_A$  (identita).
- **Realizace (interpretace) funkčního symbolu**  $f \in \mathcal{F}$  na  $A$  je libovolná funkce  $f^A : A^{\text{ar}(f)} \rightarrow A$ . Realizace **konstantního** symbolu je tedy prvek z  $A$ .

**Struktura** jazyka  $L$  ( **$L$ -struktura**) je trojice  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ , kde

- $A$  je neprázdná množina, zvaná **doména (univerzum)** struktury  $\mathcal{A}$ ,
- $\mathcal{R}^A = \langle R^A \mid R \in \mathcal{R} \rangle$  je **soubor** realizací relačních symbolů (relací),
- $\mathcal{F}^A = \langle f^A \mid f \in \mathcal{F} \rangle$  je **soubor** realizací funkčních symbolů (funkcí).

Strukturu pro jazyk  $L$  nazýváme také **model jazyka**  $L$ . Třída všech modelů jazyka  $L$  se značí  $M(L)$ . Např. **struktury pro jazyk**  $L = \langle \leq \rangle$  jsou

$\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ ,  $\langle \mathbb{Q}, > \rangle$ ,  $\langle X, E \rangle$  pokud  $X \neq \emptyset$ ,  $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ .

# Hodnota termu

Nechť  $t$  je term jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$  je struktura pro  $L$ .

- **Ohodnocení proměnných** v množině  $A$  je funkce  $e: \text{Var} \rightarrow A$ .
- **Hodnota**  $t^{\mathcal{A}}[e]$  termu  $t$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$  je dána induktivním předpisem

$$x^{\mathcal{A}}[e] = e(x) \quad \text{pro každé } x \in \text{Var},$$

$$(f(t_1, \dots, t_n))^{\mathcal{A}}[e] = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \quad \text{pro každé } f \in \mathcal{F}.$$

- Speciálně, pro konstantní symbol  $c$  je  $c^{\mathcal{A}}[e] = c^{\mathcal{A}}$ .
- Je-li  $t$  **konstantní** term, jeho hodnota v  $\mathcal{A}$  nezávisí na ohodnocení  $e$ .
- Hodnota termu v  $\mathcal{A}$  závisí pouze na ohodnocení jeho proměnných.

*Např. hodnota termu  $x + 1$  ve struktuře  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, \cdot, 3 \rangle$  při ohodnocení  $e$ , pro které  $e(x) = 2$ , je  $(x + 1)^{\mathcal{N}}[e] = 6$ .*

# Hodnota atomické formule

Nechť  $\varphi$  je **atomická** formule tvaru  $R(t_1, \dots, t_n)$  jazyka  $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$  a  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$  je struktura pro  $L$ .

- **Hodnota**  $H_{at}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$  formule  $\varphi$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$  je

$$H_{at}^{\mathcal{A}}(R(t_1, \dots, t_n))[e] = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (t_1^{\mathcal{A}}[e], \dots, t_n^{\mathcal{A}}[e]) \in R^A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

přičemž  $=^{\mathcal{A}}$  je  $\text{Id}_A$ , tj.  $H_{at}^{\mathcal{A}}(t_1 = t_2)[e] = 1$  pokud  $t_1^{\mathcal{A}}[e] = t_2^{\mathcal{A}}[e]$ , jinak 0.

- Je-li  $\varphi$  sentence, tj. všechny její termy jsou **konstantní**, její hodnota v  $\mathcal{A}$  nezávisí na ohodnocení  $e$ .
- Hodnota  $\varphi$  v  $\mathcal{A}$  závisí pouze na ohodnocení jejích (volných) proměnných.

*Např. hodnota formule  $\varphi$  tvaru  $x + 2 \leq 2$  ve struktuře  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, 2, \leq \rangle$  při ohodnocení  $e$  je  $H_{at}^{\mathcal{N}}(\varphi)[e] = 1$  právě když  $e(x) = 0$ .*

# Hodnota formule

*Hodnota*  $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$  formule  $\varphi$  ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$  je

$H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = H_{at}^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$  pokud  $\varphi$  je atomická,

$$H^{\mathcal{A}}(\neg\varphi)[e] = \neg_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \wedge \psi)[e] = \wedge_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \vee \psi)[e] = \vee_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \rightarrow \psi)[e] = \rightarrow_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}(\varphi \leftrightarrow \psi)[e] = \leftrightarrow_1(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e], H^{\mathcal{A}}(\psi)[e])$$

$$H^{\mathcal{A}}((\forall x)\varphi)[e] = \min_{a \in A}(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

$$H^{\mathcal{A}}((\exists x)\varphi)[e] = \max_{a \in A}(H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e(x/a)])$$

kde  $\neg_1, \wedge_1, \vee_1, \rightarrow_1, \leftrightarrow_1$  jsou Booleovské funkce dané tabulkami a  $e(x/a)$  pro  $a \in A$  značí ohodnocení získané z  $e$  nastavením  $e(x) = a$ .

*Pozorování*  $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e]$  závisí pouze na ohodnocení *volných* proměnných ve  $\varphi$ .

# Platnost při ohodnocení

Formule  $\varphi$  je *pravdivá (platí) ve struktuře  $\mathcal{A}$  při ohodnocení  $e$* , pokud  $H^{\mathcal{A}}(\varphi)[e] = 1$ . Pak píšeme  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ , v opačném případě  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$ . Platí

$\mathcal{A} \models \neg\varphi[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \wedge \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ a $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \vee \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ nebo $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \rightarrow \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	jestliže $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ , pak $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \psi[e]$
$\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro každé $a \in A$
$\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi[e]$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ pro nějaké $a \in A$

**Pozorování** Necht' term  $t$  je *substituovatelný* za proměnnou  $x$  do formule  $\varphi$  a formule  $\psi$  je *varianta*  $\varphi$ . Pak pro každou strukturu  $\mathcal{A}$  a ohodnocení  $e$  platí

- $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$  pro  $a = t^{\mathcal{A}}[e]$ ,
- $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  právě když  $\mathcal{A} \models \psi[e]$ .

# Platnost ve struktuře

Nechť  $\varphi$  je formule jazyka  $L$  a  $\mathcal{A}$  je struktura pro  $L$ .

- $\varphi$  je **pravdivá (platí) ve struktuře  $\mathcal{A}$** , značeno  $\mathcal{A} \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi[e]$  pro každé ohodnocení  $e: \text{Var} \rightarrow A$ . V opačném případě píšeme  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ .
- $\varphi$  je **lživá v  $\mathcal{A}$** , pokud  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \not\models \varphi[e]$  pro každé  $e: \text{Var} \rightarrow A$ .
- Pro každé formule  $\varphi, \psi$ , proměnnou  $x$  a strukturu  $\mathcal{A}$  platí

$$(1) \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \not\models \neg\varphi$$

$$(2) \quad \mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ a } \mathcal{A} \models \psi$$

$$(3) \quad \mathcal{A} \models \varphi \vee \psi \quad \Leftarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi \text{ nebo } \mathcal{A} \models \psi$$

$$(4) \quad \mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models (\forall x)\varphi$$

- Je-li  $\varphi$  **sentence**, je  $\varphi$  pravdivá v  $\mathcal{A}$  či lživá v  $\mathcal{A}$  a tedy implikace (1) platí i obráceně. Je-li  $\varphi$  nebo  $\psi$  sentence, implikace (3) platí i obráceně.
- Z (4) plyne, že  $\mathcal{A} \models \varphi$  právě když  $\mathcal{A} \models \psi$ , kde  $\psi$  je **generální uzávěr**  $\varphi$ , tj. formule  $(\forall x_1) \cdots (\forall x_n)\varphi$ , v níž  $x_1, \dots, x_n$  jsou všechny volné proměnné  $\varphi$ .

# Platnost v teorii a logická platnost

- **Teorie** jazyka  $L$  je libovolná množina  $T$  formulí jazyka  $L$  (tzv. **axiomů**).
- **Model teorie**  $T$  je  $L$ -struktura  $\mathcal{A}$  taková, že  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro každé  $\varphi \in T$ , značíme  $\mathcal{A} \models T$ .
- **Třída modelů** teorie  $T$  je  $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$ .
- Formule  $\varphi$  je **pravdivá v  $T$**  (**platí v  $T$** ), značíme  $T \models \varphi$ , pokud  $\mathcal{A} \models \varphi$  pro každý model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$ . V opačném případě píšeme  $T \not\models \varphi$ .
- Formule  $\varphi$  je **lživá v  $T$** , pokud  $T \models \neg\varphi$ , tj. je lživá v každém modelu  $T$ .
- Formule  $\varphi$  je **nezávislá v  $T$** , pokud není pravdivá v  $T$  ani lživá v  $T$ .
- Je-li  $T = \emptyset$ , je  $M(T) = M(L)$  a teorii  $T$  vynecháváme, případně říkáme “v logice”. Pak  $\models \varphi$  značí, že  $\varphi$  je **pravdivá** ((**logicky**) **platí**, **tautologie**).
- **Důsledek**  $T$  je množina  $\theta^L(T)$  všech **sentencí** jazyka  $L$  pravdivých v  $T$ , tj.
 
$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

## Příklad teorie

**Teorie uspořádání**  $T$  jazyka  $L = \langle \leq \rangle$  s rovností má axiomy

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

Modely  $T$  jsou  $L$ -struktury  $\langle \mathcal{S}, \leq_{\mathcal{S}} \rangle$ , tzv. **uspořádané množiny**, ve kterých platí axiomy  $T$ , např.  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$  nebo  $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$  pro  $X = \{0, 1, 2\}$ .

- Formule  $\varphi$  ve tvaru  $x \leq y \vee y \leq x$  platí v  $\mathcal{A}$ , ale neplatí v  $\mathcal{B}$ , neboť např.  $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$  při ohodnocení  $e(x) = \{0\}$ ,  $e(y) = \{1\}$ , je tedy nezávislá v  $T$ .
- Sentence  $\psi$  ve tvaru  $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$  je pravdivá v  $\mathcal{B}$  a lživá v  $\mathcal{A}$ , je tedy rovněž nezávislá v  $T$ . Píšeme  $\mathcal{B} \models \psi$ ,  $\mathcal{A} \models \neg\psi$ .
- Formule  $\chi$  ve tvaru  $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$  je pravdivá v  $T$ , píšeme  $T \models \chi$ , totéž platí pro její **generální uzávěr**.