

Výroková a predikátová logika - VII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

Platnost v teorii a logická platnost

- **Teorie** jazyka L je libovolná množina T formulí jazyka L (tzv. **axiomů**).
- **Model teorie** T je L -struktura \mathcal{A} taková, že $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každé $\varphi \in T$, značíme $\mathcal{A} \models T$.
- **Třída modelů** teorie T je $M(T) = \{\mathcal{A} \in M(L) \mid \mathcal{A} \models T\}$.
- Formule φ je **pravdivá v T** (**platí v T**), značíme $T \models \varphi$, pokud $\mathcal{A} \models \varphi$ pro každý model \mathcal{A} teorie T . V opačném případě píšeme $T \not\models \varphi$.
- Formule φ je **lživá v T** , pokud $T \models \neg\varphi$, tj. je lživá v každém modelu T .
- Formule φ je **nezávislá v T** , pokud není pravdivá v T ani lživá v T .
- Je-li $T = \emptyset$, je $M(T) = M(L)$ a teorii T vynecháváme, případně říkáme “v logice”. Pak $\models \varphi$ značí, že φ je **pravdivá** ((**logicky**) **platí**, **tautologie**).
- **Důsledek** T je množina $\theta^L(T)$ všech **sentencí** jazyka L pravdivých v T , tj.

$$\theta^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \models \varphi \text{ a } \varphi \text{ je sentence}\}.$$

Příklad teorie

Teorie uspořádání T jazyka $L = \langle \leq \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

Modely T jsou L -struktury $\langle S, \leq_S \rangle$, tzv. **uspořádané množiny**, ve kterých platí axiomy T , např. $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ nebo $\mathcal{B} = \langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ pro $X = \{0, 1, 2\}$.

- Formule φ ve tvaru $x \leq y \vee y \leq x$ platí v \mathcal{A} , ale neplatí v \mathcal{B} , neboť např. $\mathcal{B} \not\models \varphi[e]$ při ohodnocení $e(x) = \{0\}$, $e(y) = \{1\}$, je tedy nezávislá v T .
- Sentence ψ ve tvaru $(\exists x)(\forall y)(y \leq x)$ je pravdivá v \mathcal{B} a lživá v \mathcal{A} , je tedy rovněž nezávislá v T . Píšeme $\mathcal{B} \models \psi$, $\mathcal{A} \models \neg\psi$.
- Formule χ ve tvaru $(x \leq y \wedge y \leq z \wedge z \leq x) \rightarrow (x = y \wedge y = z)$ je pravdivá v T , píšeme $T \models \chi$, totéž platí pro její **generální uzávěr**.

Nesplnitelnost a pravdivost

Problém pravdivosti v teorii lze převést na problém existence modelu.

Tvrzení Pro každou teorii T a *sentenci* φ (stejného jazyka)

$$T, \neg\varphi \text{ nemá model} \Leftrightarrow T \models \varphi.$$

Důkaz Z definic plynou ekvivalence následujících tvrzení.

- (1) $T, \neg\varphi$ nemá model,
- (2) $\neg\varphi$ neplatí v žádném modelu teorie T ,
- (3) φ platí v každém modelu teorie T ,
- (4) $T \models \varphi$. \square

Poznámka Předpoklad, že φ je sentence, je nutný pro (2) \Leftrightarrow (3).

Např. teorie $\{P(c), \neg P(x)\}$ nemá model, ale $P(c) \not\models P(x)$, kde P je unární relační symbol a c je konstantní symbol.

Základní algebraické teorie - příklady

- **Teorie grup** nad jazykem $L = \langle +, -, 0 \rangle$ s rovností má axiomy

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{asociativita } +)$$

$$0 + x = x = x + 0 \quad (\text{neutralita } 0 \text{ k } +)$$

$$x + (-x) = 0 = (-x) + x \quad (-x \text{ je inverzní prvek k } x)$$

- **Teorie komutativních grup** má navíc ax. $x + y = y + x$ (komutativita +)

- **Teorie okruhů** je jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ s rovností, má navíc axiomy

$$1 \cdot x = x = x \cdot 1 \quad (\text{neutralita } 1 \text{ k } \cdot)$$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (\text{asociativita } \cdot)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (\text{distributivita } \cdot \text{ k } +)$$

- **Teorie komutativních okruhů** má navíc ax. $x \cdot y = y \cdot x$ (komutativita \cdot)

- **Teorie těles** stejného jazyka má navíc axiomy

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x \cdot y = 1) \quad (\text{existence inverzního prvku k } \cdot)$$

$$0 \neq 1 \quad (\text{netrivialita})$$

Vlastnosti teorií

Teorie T jazyka L je (*sémanticky*)

- *sporná*, jestliže v ní platí \perp (spor), jinak je *bezesporná* (*splnitelná*),
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá *sentence* je v ní pravdivá či lživá,
- *extenze* teorie T' jazyka L' , jestliže $L' \subseteq L$ a $\theta^{L'}(T') \subseteq \theta^L(T)$,
o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a
konzervativní, pokud $\theta^{L'}(T') = \theta^L(T) \cap \text{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T' , jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T ,

Struktury \mathcal{A} , \mathcal{B} pro jazyk L jsou *elementárně ekvivalentní*, značeno $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, platí-li v nich stejné formule.

Pozorování Necht' T a T' jsou teorie jazyka L . Teorie T je (*sémanticky*)

- (1) *bezesporná*, právě když má model,
- (2) *kompletní*, právě když má až na *elementární ekvivalenci* jediný model,
- (3) *extenze* T' , právě když $M(T) \subseteq M(T')$,
- (4) *ekvivalentní* s T' , právě když $M(T) = M(T')$.

Podstruktura

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ a $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{R}^B, \mathcal{F}^B \rangle$ jsou struktury pro jazyk $L = \langle \mathcal{R}, \mathcal{F} \rangle$.

Řekneme, že \mathcal{B} je (indukovaná) **podstruktura** \mathcal{A} , značeno $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, pokud

- (i) $B \subseteq A$,
- (ii) $R^B = R^A \cap B^{\text{ar}(R)}$ pro každé $R \in \mathcal{R}$,
- (iii) $f^B = f^A \cap (B^{\text{ar}(f)} \times B)$, tj. $f^B = f^A \upharpoonright B^{\text{ar}(f)}$, pro každé $f \in \mathcal{F}$.

Pozorování Množina $C \subseteq A$ je doménou nějaké podstruktury struktury \mathcal{A} , právě když C je **uzavřená** na všechny funkce struktury \mathcal{A} (včetně konstant).

- Pak příslušnou podstrukturu značíme $\mathcal{A} \upharpoonright C$ a říkáme, že je to **restrikce** (**parcializace**) struktury \mathcal{A} na C .
- Množina $C \subseteq A$ je **uzavřená** na funkci $f: A^n \rightarrow A$, pokud $f(x_1, \dots, x_n) \in C$ pro každé $x_1, \dots, x_n \in C$.

Např. $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ je podstrukturou $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$ a lze psát $\underline{\mathbb{Z}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{Z}$.

Dále $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je jejich podstrukturou a $\underline{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{Q}} \upharpoonright \mathbb{N} = \underline{\mathbb{Z}} \upharpoonright \mathbb{N}$.

Platnost v podstruktuře

Nechť \mathcal{B} je podstruktura struktury \mathcal{A} pro (pevný) jazyk L .

Tvrzení Pro každou *otevřenou* formuli φ a ohodnocení $e: \text{Var} \rightarrow B$ platí
 $\mathcal{B} \models \varphi[e]$ právě když $\mathcal{A} \models \varphi[e]$.

Důkaz Je-li φ atomická, plyne tvrzení z definice platnosti při ohodnocení. Dále snadno indukcí dle struktury formule. \square

Důsledek *Otevřená* formule platí ve struktuře \mathcal{A} , právě když platí v každé podstruktuře $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$.

- Teorie T je *otevřená*, jsou-li všechny její axiomy otevřené formule.

Důsledek Každá podstruktura modelu *otevřené* teorie T je modelem T .

Např. každá podstruktura grafu, tj. modelu teorie grafů, je rovněž grafem, zveme ho *podgraf*. Obdobně např. podgrupa nebo Booleova podalgebra.

Generovaná podstruktura, expanze, redukt

Nechť $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R}^A, \mathcal{F}^A \rangle$ je struktura a $X \subseteq A$. Označme B **nejmenší** podmnožinu množiny A obsahující X , která je **uzavřená** na všechny funkce struktury \mathcal{A} (včetně konstant). Pak strukturu $\mathcal{A} \upharpoonright B$ značíme rovněž $\mathcal{A}\langle X \rangle$ a podstruktura říkáme, že je to \mathcal{A} **generovaná** množinou X .

Např. pro $\mathbb{Q} = \langle \mathbb{Q}, +, \cdot, 0 \rangle$, $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \cdot, 0 \rangle$ a $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$ je $\mathbb{Q}\langle\{1\}\rangle = \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}\langle\{-1\}\rangle = \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}\langle\{2\}\rangle$ je podstruktura na všech sudých přirozených číslech.

Nechť \mathcal{A}' je struktura pro jazyk L' a $L \subseteq L'$ je jazyk. Odebráním realizací symbolů, jež nejsou v L , získáme z \mathcal{A}' strukturu \mathcal{A} , kterou nazýváme **redukt** struktury \mathcal{A}' na jazyk L . Obráceně, \mathcal{A}' je **expanze** struktury \mathcal{A} do jazyka L' .

*Např. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ je redukt $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0 \rangle$. Naopak, struktura $\langle \mathbb{N}, +, c_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ taková, že $c_i = i$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$, je expanze $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ o **jména prvků** z \mathbb{N} .*

Věta o konstantách

Věta Necht' φ je formule jazyka L s volnými proměnnými x_1, \dots, x_n a T je teorie jazyka L . Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly c_1, \dots, c_n a T' teorii T nad jazykem L' . Pak

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

Důkaz (\Rightarrow) Je-li \mathcal{A}' model teorie T' , necht' \mathcal{A} je **redukt** \mathcal{A}' na L . Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi[e]$ pro každé ohodnocení e , platí i

$$\mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n).$$

(\Leftarrow) Je-li \mathcal{A} model teorie T a e ohodnocení, necht' \mathcal{A}' je **expanze** \mathcal{A} na L' o konstanty $c_i^{A'} = e(x_i)$ pro všechna i . Jelikož $\mathcal{A}' \models \varphi(x_1/c_1, \dots, x_n/c_n)[e']$ pro libovolné ohodnocení e' , platí i

$$\mathcal{A}' \models \varphi[e(x_1/c_1^{A'}, \dots, x_n/c_n^{A'})], \quad \text{tj. } \mathcal{A} \models \varphi[e]. \quad \square$$

Definovatelné množiny

Zajímá nás, které množiny lze v dané struktuře zdefinovat.

- **Množina definovaná formulí** $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ **ve struktuře** \mathcal{A} je množina

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]\}.$$

Zkráceným zápisem, $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$, kde $|\bar{x}| = n$.

- **Množina definovaná formulí** $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ **s parametry** $\bar{b} \in A^{|\bar{y}|}$ **ve struktuře** \mathcal{A} je

$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}.$$

Např. pro $\varphi = E(x, y)$ je $\varphi^{\mathcal{G}, b}(x, y)$ množina sousedů vrcholu b v grafu \mathcal{G} .

- Pro strukturu \mathcal{A} , množinu $B \subseteq A$ a $n \in \mathbb{N}$ označme $\mathbf{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ třídu všech množin $D \subseteq A^n$ definovatelných ve struktuře \mathcal{A} s parametry z B .

Pozorování $\mathbf{Df}^n(\mathcal{A}, B)$ je uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik a obsahuje \emptyset, A^n . Tedy tvoří podalgebru potenční algebry $\mathcal{P}(A^n)$.

Příklad - databázové dotazy

<i>Filmy</i>	<i>název</i>	<i>režisér</i>	<i>herec</i>	<i>Program</i>	<i>kino</i>	<i>název</i>	<i>čas</i>
	Lidé z Maringotek	M. Frič	J. Tříška		Světozor	Po strništi bos	13:15
	Po strništi bos	J. Svěrák	Z. Svěrák		Mat	Po strništi bos	16:15
	Po strništi bos	J. Svěrák	J. Tříška		Mat	Lidé z Maringotek	18:30

Kde a kdy mohu dnes vidět film s Janem Tříškou?

select *Program.kino, Program.čas* **from** *Filmy, Program*
where *Filmy.název = Program.název* **and** *herec = 'J. Tříška'*;

Totěž dostaneme jako množinu $\varphi^D(x, y)$ definovanou formulí $\varphi(x, y)$

$$(\exists n)(\exists r)(P(x, n, y) \wedge F(n, r, \text{'J. Tříška'}))$$

ve struktuře $\mathcal{D} = \langle D, \text{Filmy}, \text{Program}, c^D \rangle_{c \in D}$ jazyka $L = \langle F, P, c \rangle_{c \in D}$, kde $D = \{\text{'Po strništi bos'}, \text{'J. Tříška'}, \text{'Mat'}, \text{'13:15'}, \dots\}$ a $c^D = c$ pro každé $c \in D$.

Booleovy algebry

Teorie *Booleových algeber* jazyka $L = \langle -, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ s rovností má axiomy

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad (\text{asociativita } \wedge)$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad (\text{asociativita } \vee)$$

$$x \wedge y = y \wedge x \quad (\text{komutativita } \wedge)$$

$$x \vee y = y \vee x \quad (\text{komutativita } \vee)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad (\text{distributivita } \wedge \text{ k } \vee)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad (\text{distributivita } \vee \text{ k } \wedge)$$

$$x \wedge (x \vee y) = x, \quad x \vee (x \wedge y) = x \quad (\text{absorbce})$$

$$x \vee (-x) = 1, \quad x \wedge (-x) = 0 \quad (\text{komplementace})$$

$$0 \neq 1 \quad (\text{netrivialita})$$

Nejmenší model je $\underline{2} = \langle 2, -_1, \wedge_1, \vee_1, 0, 1 \rangle$. Konečné Booleovy algebry jsou (až na izomorfismus) právě $\underline{n} = \langle n, -_n, \wedge_n, \vee_n, 0_n, 1_n \rangle$ pro $n \in \mathbb{N}^+$, kde jednotlivé operace (na binárních n -ticích) jsou operace z $\underline{2}$ “po složkách”.

Vztah výrokové a predikátové logiky

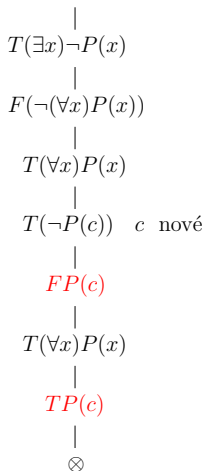
- Výrokové formule s (*univerzálními*) spojkami \neg , \wedge , \vee (případně s \top , \perp) lze považovat za **Booleovské termy**. Hodnota výroku φ při daném ohodnocení je pak hodnotou termu v Booleově algebře 2.
- **Algebra výroků** nad \mathbb{P} je Booleova algebra (i pro \mathbb{P} nekonečné).
- Reprezentujeme-li atomické formule v **otevřené** formuli φ (bez rovnosti) pomocí prvovýroků, získáme výrokovou formuli, která je pravdivá, právě když φ je pravdivá.
- Výrokovou logiku lze zavést jako **fragment** predikátové logiky pomocí **nulárních** relačních symbolů (*syntax*) a nulárních relací (*sémantika*), přičemž $A^0 = \{\emptyset\} = 1$ a tedy $R^A \subseteq A^0$ je $R^A = \emptyset = 0$ anebo $R^A = \{\emptyset\} = 1$.

Tablo metoda v PL - rozdílly

- Formule v položkách budou **sentence** (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme **nová atomická tabla** pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat **konstantní termy** dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o **nové (pomocné) konstantní symboly** (společně mnoho) pro reprezentaci “svědků” položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V **dokončené** bezesporné větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou **instance** $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Tablo v PL - příklady

$$F((\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x))$$



$$F(\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x))$$

