

# Výroková a predikátová logika - VIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

# Tablo metoda ve VL - opakování

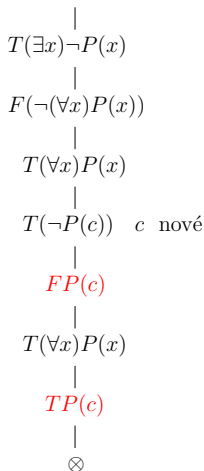
- **Tablo** je binární strom reprezentující vyhledávání *protipříkladu*.
- Vrcholy jsou označeny **položkami**, tj. formulami s **příznakem**  $T / F$ , který reprezentuje předpoklad, že formule v nějakém modelu platí / neplatí.
- Je-li tento předpoklad správný, je správný i v nějaké větvi pod ní.
- Větev je **sporná** (selže), pokud obsahuje  $T\psi$ ,  $F\psi$  pro nějaké  $\psi$ .
- **Důkaz** formule  $\varphi$  je **sporné** tablo s kořenem  $F\varphi$ , tj. tablo v němž každá větev je sporná (nebyl nalezen protipříklad), pak  $\varphi$  je pravdivá.
- Pokud protipříklad existuje, v **dokončeném** tablu bude větev, která ho **poskytuje**, tato větev může být nekonečná.
- Lze zkonstruovat **systematické tablo**, jež je vždy dokončené.
- Pokud je  $\varphi$  pravdivá, systematické tablo pro  $\varphi$  je sporné, tj. důkazem  $\varphi$ , v tom případě je i **konečné**.

# Tablo metoda v PL - rozdílly

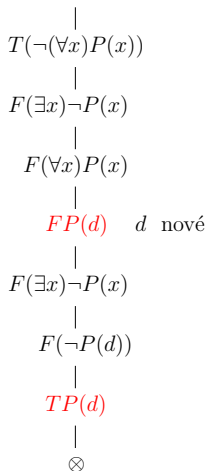
- Formule v položkách budou **sentence** (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme **nová atomická tabla** pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat **konstantní termy** dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o **nové (pomocné) konstantní symboly** (spočetně mnoho) pro reprezentaci “svědků” položek  $T(\exists x)\varphi(x)$  a  $F(\forall x)\varphi(x)$ .
- V **dokončené** bezesporné větvi s položkou  $T(\forall x)\varphi(x)$  či  $F(\exists x)\varphi(x)$  budou **instance**  $T\varphi(x/t)$  resp.  $F\varphi(x/t)$  pro každý konstantní term  $t$  (rozšířeného jazyka).

# Tablo v PL - příklady

$$F((\exists x)\neg P(x) \rightarrow \neg(\forall x)P(x))$$



$$F(\neg(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)\neg P(x))$$



# Předpoklady

- 1) *Dokazovaná formule  $\varphi$  je **sentence**.* Není-li  $\varphi$  sentence, můžeme ji nahradit za její **generální uzávěr**  $\varphi'$ , neboť pro každou teorii  $T$ ,

$$T \models \varphi \quad \text{právě když} \quad T \models \varphi'.$$

- 2) *Dokazujeme z teorie v **uzavřeném tvaru**, tj. každý axiom je sentence.* Nahrazením každého axiomu  $\psi$  za jeho generální uzávěr  $\psi'$  získáme **ekvivalentní** teorii, neboť pro každou strukturu  $\mathcal{A}$  (daného jazyka  $L$ ),

$$\mathcal{A} \models \psi \quad \text{právě když} \quad \mathcal{A} \models \psi'.$$

- 3) *Jazyk  $L$  je **spočetný**.* Pak každá teorie nad  $L$  je spočetná. Označme  $L_C$  rozšíření jazyka  $L$  o nové konstantní symboly  $c_0, c_1, \dots$  (spočetně nekonečně mnoho). Platí, že konstantních termů jazyka  $L_C$  je spočetně. Necht'  $t_i$  označuje  $i$ -tý konstantní term (v pevně zvoleném **očíslování**).

- 4) *Zatím budeme předpokládat, že jazyk je **bez rovnosti**.*

# Atomická tabla - původní

**Atomická tabla** jsou všechny následující (položkami značkové) stromy, kde  $\alpha$  je libovolná atomická sentence a  $\varphi, \psi$  jsou libovolné sentence, vše v  $L_C$ .

$T\alpha$	$F\alpha$	$\begin{array}{c} T(\varphi \wedge \psi) \\   \\ T\varphi \\   \\ T\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F(\varphi \wedge \psi) & \\ / & \backslash \\ F\varphi & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T(\varphi \vee \psi) & \\ / & \backslash \\ T\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \vee \psi) \\   \\ F\varphi \\   \\ F\psi \end{array}$
$\begin{array}{c} T(\neg\varphi) \\   \\ F\varphi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\neg\varphi) \\   \\ T\varphi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T(\varphi \rightarrow \psi) & \\ / & \backslash \\ F\varphi & T\psi \end{array}$	$\begin{array}{c} F(\varphi \rightarrow \psi) \\   \\ T\varphi \\   \\ F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} T(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & \backslash \\ T\varphi & F\varphi \\   &   \\ T\psi & F\psi \end{array}$	$\begin{array}{cc} F(\varphi \leftrightarrow \psi) & \\ / & \backslash \\ T\varphi & F\varphi \\   &   \\ F\psi & T\psi \end{array}$

## Atomická tabla - nová

**Atomická tabla** jsou i následující (položkami značkové) stromy, kde  $\varphi$  je libovolná formule jazyka  $L_C$  ve volné proměnné  $x$ ,  $t$  je libovolný konstantní term jazyka  $L_C$  a  $c$  je **nový** konstantní symbol z  $L_C \setminus L$ .

#	*	*	#
$T(\forall x)\varphi(x)$	$F(\forall x)\varphi(x)$	$T(\exists x)\varphi(x)$	$F(\exists x)\varphi(x)$
$T\varphi(x/t)$	$F\varphi(x/c)$	$T\varphi(x/c)$	$F\varphi(x/t)$
pro libovolný konst. term $t$	pro <i>novou</i> konstantu $c$	pro <i>novou</i> konstantu $c$	pro libovolný konst. term $t$

**Poznámka** Konstantní symbol  $c$  reprezentuje "svědka" položky  $T(\exists x)\varphi(x)$  či  $F(\forall x)\varphi(x)$ . Jelikož nechceme, aby na  $c$  byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol  $c$  lze použít.

# Tablo

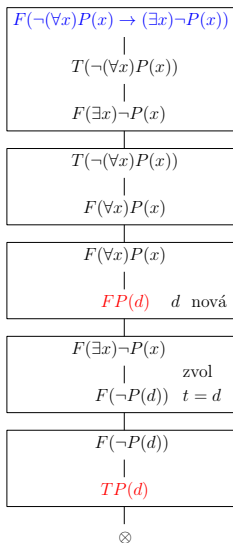
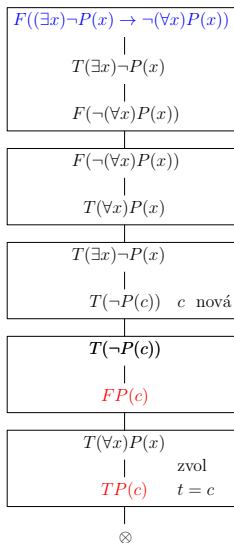
**Konečné tablo** z teorie  $T$  je binární, položkami značkový strom s předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z  $T$ , přičemž v případě (\*) lze použít libovolný konstantní symbol  $c \in L_C \setminus L$ ,
- (ii) je-li  $P$  položka na větvi  $V$  konečného tabla z  $T$ , pak připojením atomického tabla pro  $P$  na **konec větve**  $V$  vznikne konečné tablo z  $T$ , přičemž v případě (\*) lze použít pouze konstantní symbol  $c \in L_C \setminus L$ , který se dosud **nevyskytuje** na  $V$ ,
- (iii) je-li  $V$  větev konečného tabla z  $T$  a  $\varphi \in T$ , pak připojením  $T\varphi$  na konec větve  $V$  vznikne rovněž konečné tablo z  $T$ .
- (iv) každé konečné tablo z  $T$  vznikne **konečným** užitím pravidel (i), (ii), (iii).

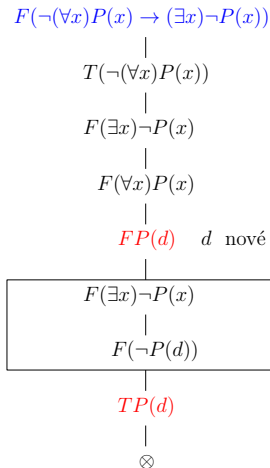
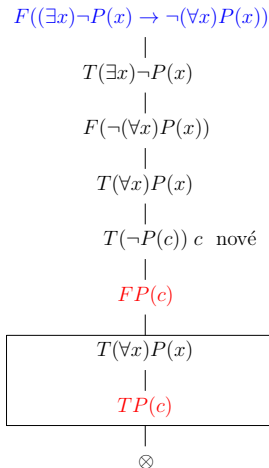
**Tablo** z teorie  $T$  je posloupnost  $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \dots$  konečných tabel z  $T$  takových, že  $\tau_{n+1}$  vznikne z  $\tau_n$  pomocí (ii) či (iii), formálně  $\tau = \cup \tau_n$ .



# Konstrukce tabla



# Konvence



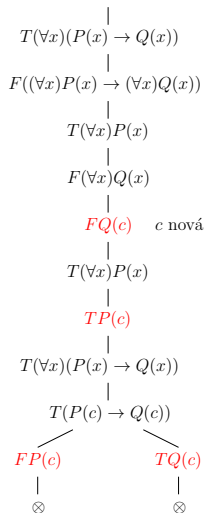
Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  či  $F(\exists x)\varphi(x)$ .

# Tablo důkaz

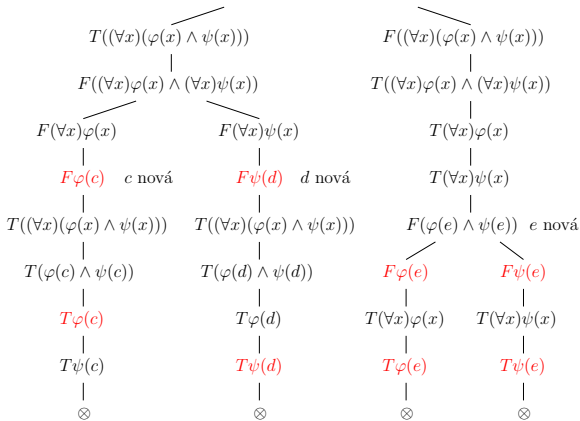
- Větev  $V$  tabla  $\tau$  je *sporná*, obsahuje-li položky  $T\varphi$  a  $F\varphi$  pro nějakou sentenci  $\varphi$ , jinak je *bezesporná*.
- Tablo  $\tau$  je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence  $\varphi$  z teorie  $T$  je *sporné tablo* z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.
- $\varphi$  je (*tablo*) *dokazatelná* z teorie  $T$ , píšeme  $T \vdash \varphi$ , má-li tablo důkaz z  $T$ .
- *Zamítnutí* sentence  $\varphi$  *tablem* z teorie  $T$  je *sporné tablo* z  $T$  s položkou  $T\varphi$  v kořeni.
- Sentence  $\varphi$  je (*tablo*) *zamítnutelná* z teorie  $T$ , má-li zamítnutí tablem z  $T$ , tj.  $T \vdash \neg\varphi$ .

## Příklady

$$F((\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)))$$



$$F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$$



# Dokončené tablo

Chceme, aby dokončená bezesporná větev poskytovala *protipříklad*.

Výskyt položky  $P$  ve vrcholu  $v$  tabla  $\tau$  je  *$i$ -tý*, pokud  $v$  má v  $\tau$  právě  $i - 1$  předků označených  $P$  a je *redukováný* na větvi  $V$  skrze  $v$ , pokud

- $P$  není tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  ani  $F(\exists x)\varphi(x)$  a  $P$  se vyskytuje na  $V$  jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci  $\tau$  již došlo k rozvoji  $P$  na  $V$ , nebo
- $P$  je tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  či  $F(\exists x)\varphi(x)$ , má  $(i + 1)$ -ní výskyt na  $V$  a zároveň se na  $V$  vyskytuje  $T\varphi(x/t_i)$  resp.  $F\varphi(x/t_i)$ , kde  $t_i$  je  $i$ -tý konstantní term (jazyka  $L_C$ ).

Nechť  $V$  je větev tabla  $\tau$  z teorie  $T$ . Řekneme, že

- větev  $V$  je *dokončená*, je-li sporná, nebo každý výskyt položky na  $V$  je redukováný na  $V$  a navíc  $V$  obsahuje  $T\varphi$  pro každé  $\varphi \in T$ ,
- tablo  $\tau$  je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

# Systematické tablo - konstrukce

Nechť  $R$  je položka a  $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  je (konečná či nekonečná) teorie.

- (1) Za  $\tau_0$  vezmi atomické tablo pro  $R$ . V případě (\*) vezmi lib.  $c \in L_C \setminus L$ , v případě (#) za  $t$  vezmi term  $t_1$ . Dokud to lze, aplikuj následující kroky.
- (2) Nechť  $v$  je **nejlevější** vrchol v co **nejmenší** úrovni již daného tabla  $\tau_n$  obsahující výskyt položky  $P$ , který není redukovaný na nějaké bezesporné větvi **skrže**  $v$ . (Neexistuje-li  $v$ , vezmi  $\tau'_n = \tau_n$  a jdi na (4).)
- (3a) Není-li  $P$  tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  ani  $F(\exists x)\varphi(x)$ , za  $\tau'_n$  vezmi tablo vzniklé z  $\tau_n$  přidáním atomického tabla pro  $P$  na každou bezespornou větev skrže  $v$ . V případě (\*) za  $c$  vezmi  $c_i$  pro nejmenší možné  $i$ .
- (3b) Je-li  $P$  tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$  či  $F(\exists x)\varphi(x)$  a ve  $v$  má  $i$ -tý výskyt, za  $\tau'_n$  vezmi tablo vzniklé z  $\tau_n$  připojením atomického tabla pro  $P$  na každou bezespornou větev skrže  $v$ , přičemž za  $t$  vezmi term  $t_i$ .
- (4) Za  $\tau_{n+1}$  vezmi tablo vzniklé z  $\tau'_n$  přidáním  $T\varphi_n$  na každou bezespornou větev neobsahující  $T\varphi_n$ . (Neexistuje-li  $\varphi_n$ , vezmi  $\tau_{n+1} = \tau'_n$ .)

**Systematické tablo** z  $T$  pro  $R$  je výsledkem uvedené konstrukce, tj.  $\tau = \cup \tau_n$ .

# Systematické tablo - příklad

$$T((\exists y)(\neg R(y, y) \vee P(y, y)) \wedge (\forall x)R(x, x))$$

$$T(\exists y)(\neg R(y, y) \vee P(y, y))$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$T(\neg R(c_0, c_0) \vee P(c_0, c_0)) \quad c_0 \text{ nová}$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$TR(c_0, c_0)$$

(za předpokladu  $t_1 = c_0$ )

$$T(\neg R(c_0, c_0))$$

$$TP(c_0, c_0)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

$$TR(t_2, t_2)$$

$$TR(t_2, t_2)$$

$$FR(c_0, c_0)$$

$$T(\forall x)R(x, x)$$

⊗

$$TR(t_3, t_3)$$

⋮

# Systematické tablo - dokončenost

**Tvrzení** Pro každou teorii  $T$  a položku  $R$  je systematické tablo  $\tau$  **dokončené**.

**Důkaz** Necht'  $\tau = \cup \tau_n$  je systematické tablo z  $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  s  $R$  v kořeni a necht'  $P$  je položka ve vrcholu  $v$  tabla  $\tau$ .

- Do úrovně  $v$  (včetně) je v  $\tau$  jen konečně mnoho výskytů všech položek.
- Kdyby výskyt  $P$  ve  $v$  byl neredukovaný na nějaké bezesporné větvi v  $\tau$ , byl by vybrán v nějakém kroku (2) a zredukován v (3a) či (3b).
- Každá  $\varphi_n \in T$  bude dle (4) nejpozději v  $\tau_{n+1}$  na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo  $\tau$  obsahuje pouze dokončené větve.  $\square$

**Tvrzení** Je-li systematické tablo  $\tau$  důkazem (z teorie  $T$ ), je  $\tau$  konečné.

**Důkaz** Kdyby bylo  $\tau$  nekonečné, dle **Königova lemmatu** by obsahovalo nekonečnou větev. Tato větev by byla bezesporná, neboť při konstrukci  $\tau$  se sporné větve neprodlužují. Pak by ale  $\tau$  nebylo sporné.  $\square$



# Tablo metoda v jazyce s rovností

*Axiomy rovnosti* pro jazyk  $L$  s rovností jsou

(i)  $x = x$

(ii)  $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow f(x_1, \dots, x_n) = f(y_1, \dots, y_n)$   
pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f$  jazyka  $L$ .

(iii)  $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \rightarrow R(y_1, \dots, y_n))$   
pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R$  jazyka  $L$  včetně  $=$ .

*Tablo důkaz* z teorie  $T$  jazyka  $L$  *s rovností* je tablo důkaz z teorie  $T^*$ , kde  $T^*$  je rozšíření teorie  $T$  o axiomy rovnosti pro  $L$  (resp. jejich generální uzávěry).

*Poznámka* V kontextu logického programování má rovnost často jiný význam než v matematice (identita). Např. v Prologu  $t_1 = t_2$  znamená, že  $t_1$  a  $t_2$  jsou unifikovatelné.

# Kongruence a faktorstruktura

Nechť  $\sim$  je ekvivalence na  $A$ ,  $f : A^n \rightarrow A$  a  $R \subseteq A^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $\sim$  je

- **kongruence pro funkci**  $f$ , pokud pro každé  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$  platí
 
$$x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n),$$
- **kongruence pro relaci**  $R$ , pokud pro každé  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$  platí
 
$$x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_n \sim y_n \Rightarrow (R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n)).$$

Nechť ekvivalence  $\sim$  na  $A$  je kongruence pro každou funkci i relaci struktury  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$  pro jazyk  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ . **Faktorstruktura (podílová struktura)** struktury  $\mathcal{A}$  dle  $\sim$  je struktura  $\mathcal{A}/\sim = \langle A/\sim, \mathcal{F}^{A/\sim}, \mathcal{R}^{A/\sim} \rangle$ , kde

$$f^{A/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) = [f^A(x_1, \dots, x_n)]_{\sim}$$

$$R^{A/\sim}([x_1]_{\sim}, \dots, [x_n]_{\sim}) \Leftrightarrow R^A(x_1, \dots, x_n)$$

pro každé  $f \in \mathcal{F}$ ,  $R \in \mathcal{R}$  a  $x_1, \dots, x_n \in A$ , tj. funkce a relace jsou definované z  $\mathcal{A}$  pomocí **reprezentantů**.

*Např.  $\mathbb{Z}_p$  je faktorstruktura  $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$  dle kongruence modulo  $p$ .*

# Význam axiomů rovnosti

Nechť  $\mathcal{A}$  je struktura pro jazyk  $L$ , ve které je rovnost interpretovaná jako relace  $=^A$  splňující axiomy rovnosti, tj. ne nutně identita.

- 1) Z axiomů (i) a (iii) plyne, že relace  $=^A$  je **ekvivalence** na  $A$ .
- 2) Axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že relace  $=^A$  je **kongruence** pro každou funkci a relaci v  $\mathcal{A}$ .
- 3) Je-li  $\mathcal{A} \models T^*$ , je i  $(\mathcal{A}/=^A) \models T^*$ , kde  $\mathcal{A}/=^A$  je **faktorstruktura** struktury  $\mathcal{A}$  dle  $=^A$ , přičemž rovnost je v  $\mathcal{A}/=^A$  interpretovaná jako identita.

Na druhou stranu, v každém modelu, v kterém je rovnost interpretovaná jako identita, všechny axiomy rovnosti evidentně platí.

## Korektnost

Řekneme, že struktura  $\mathcal{A}$  se **shoduje s položkou**  $P$ , pokud  $P$  je  $T\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \varphi$ , nebo pokud  $P$  je  $F\varphi$  a  $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ , tj.  $\mathcal{A} \not\models \varphi$ . Navíc,  $\mathcal{A}$  se **shoduje s větví**  $V$ , shoduje-li se s každou položkou na  $V$ .

**Lemma** *Nechť  $\mathcal{A}$  je model teorie  $T$  jazyka  $L$ , který se shoduje s položkou  $R$  v kořeni tablu  $\tau = \cup \tau_n$  z  $T$ . Pak  $\mathcal{A}$  lze **expandovat** do jazyka  $L_C$  tak, že se shoduje s **nějakou** větví  $V$  v tablu  $\tau$ .*

**Poznámka** *Postačí nám expanze modelu  $\mathcal{A}$  o konstanty  $c^A$  pro  $c \in L_C \setminus L$  vyskytující se na větví  $V$ , ostatní konstanty lze dodefinovat libovolně.*

**Důkaz** Indukcí dle  $n$  nalezneme větev  $V_n$  v tablu  $\tau_n$  a expanzi  $\mathcal{A}_n$  modelu  $\mathcal{A}$  o konstanty  $c^A$  pro  $c \in L_C \setminus L$  na  $V_n$  tak, že  $\mathcal{A}_n$  se shoduje s  $V_n$  a  $V_{n-1} \subseteq V_n$ .

Předpokládejme, že máme větev  $V_n$  v  $\tau_n$  a expanzi  $\mathcal{A}_n$  shodující se s  $V_n$ .

- Vznikne-li  $\tau_{n+1}$  z  $\tau_n$  bez prodloužení  $V_n$ , položme  $V_{n+1} = V_n$ ,  $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ .
- Vznikne-li  $\tau_{n+1}$  z  $\tau_n$  připojením  $T\varphi$  k  $V_n$  pro nějaké  $\varphi \in T$ , necht'  $V_{n+1}$  je tato větev a  $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ . Jelikož  $\mathcal{A} \models \varphi$ , shoduje se  $\mathcal{A}_{n+1}$  s  $V_{n+1}$ .

## Korektnost - důkaz (pokr.)

- Jinak  $\tau_{n+1}$  vznikne z  $\tau_n$  prodloužením  $V_n$  o atomické tablo nějaké položky  $P$  na  $V_n$ . Z indukčního předpokladu víme, že  $\mathcal{A}_n$  se shoduje s  $P$ .
- (i) V případě atomického tabla pro **spojku** položíme  $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$  a snadno ověříme, že  $V_n$  lze prodloužit na větev  $V_{n+1}$  shodující se s  $\mathcal{A}_{n+1}$ .
- (ii) Je-li  $P$  tvaru  $T(\forall x)\varphi(x)$ , necht'  $V_{n+1}$  je (jednoznačné) prodloužení  $V_n$  na větev v  $\tau_{n+1}$ , tj. o položku  $T\varphi(x/t)$ . Necht'  $\mathcal{A}_{n+1}$  je **libovolná** expanze  $\mathcal{A}_n$  o nové konstanty z termu  $t$ . Jelikož  $\mathcal{A}_n \models (\forall x)\varphi(x)$ , platí  $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/t)$ . Obdobně pro  $P$  tvaru  $F(\exists x)\varphi(x)$ .
- (iii) Je-li  $P$  tvaru  $T(\exists x)\varphi(x)$ , necht'  $V_{n+1}$  je (jednoznačné) prodloužení  $V_n$  na větev v  $\tau_{n+1}$ , tj. o položku  $T\varphi(x/c)$ . Jelikož  $\mathcal{A}_n \models (\exists x)\varphi(x)$ , pro nějaké  $a \in A$  platí  $\mathcal{A}_n \models \varphi(x)[e(x/a)]$  pro každé ohodnocení  $e$ . Necht'  $\mathcal{A}_{n+1}$  je expanze  $\mathcal{A}_n$  o novou konstantu  $c^A = a$ . Pak  $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/c)$ . Obdobně pro  $P$  tvaru  $F(\forall x)\varphi(x)$ .

Základní krok pro  $n = 0$  plyne z obdobné analýzy atomických tabel pro položku  $R$  v kořeni s využitím předpokladu, že model  $\mathcal{A}$  se shoduje s  $R$ . □

# Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda v predikátové logice je *korektní*.

**Věta** Pro každou teorii  $T$  a sentenci  $\varphi$ , je-li  $\varphi$  tablo dokazatelná z  $T$ , je  $\varphi$  pravdivá v  $T$ , tj.  $T \vdash \varphi \Rightarrow T \models \varphi$ .

## Důkaz

- Necht'  $\varphi$  je tablo dokazatelná z teorie  $T$ , tj. existuje sporné tablo  $\tau$  z  $T$  s položkou  $F\varphi$  v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že  $\varphi$  není pravdivá v  $T$ , tj. existuje model  $\mathcal{A}$  teorie  $T$ , ve kterém  $\varphi$  neplatí (**protipříklad**).
- Jelikož se  $\mathcal{A}$  shoduje s položkou  $F\varphi$ , dle předchozího lemmatu lze  $\mathcal{A}$  expandovat do jazyka  $L_C$  tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu  $\tau$ .
- To ale není možné, neboť každá větev tablu  $\tau$  je sporná, tj. obsahuje dvojici  $T\psi, F\psi$  pro nějakou sentenci  $\psi$ .  $\square$

## Kanonický model

Z bezesporné větve  $V$  dokončeného tabla vyrobíme model, který se shoduje s  $V$ . Vyjdeme z dostupných syntaktických objektů - *konstantních termů*.

Nechť  $V$  je bezesporná větev dokončeného tabla z teorie  $T$  jazyka  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ . *Kanonický model* z větve  $V$  je  $L_C$ -struktura  $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ , kde

- (1)  $A$  je množina všech konstantních termů jazyka  $L_C$ ,
- (2)  $f^A(s_1, \dots, s_n) = f(s_1, \dots, s_n)$   
pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F} \cup (L_C \setminus L)$  a  $s_1, \dots, s_n \in A$ .
- (3)  $R^A(s_1, \dots, s_n) \Leftrightarrow TR(s_1, \dots, s_n)$  je položka na  $V$   
pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  či *rovnost* a  $s_1, \dots, s_n \in A$ .

*Poznámka* Výraz  $f(s_1, \dots, s_n)$  na pravé straně v (2) je konstantní term jazyka  $L_C$ , tedy prvek z  $A$ . *Neformálně, pro zdůraznění, že jde o syntaktický objekt*

$$f^A(s_1, \dots, s_n) = "f(s_1, \dots, s_n)"$$

## Kanonický model - příklad

Nechť teorie  $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$  je jazyka  $L = \langle R, f, d \rangle$ . Systematické tablo pro  $F\neg R(d)$  z  $T$  obsahuje jedinou větev  $V$  a ta je bezesporná.

Kanonický model  $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  z  $V$  je pro jazyk  $L_C$  a platí

$$A = \{d, f(d), f(f(d)), \dots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\},$$

$$d^A = d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^A(d) = "f(d)", \quad f^A(f(d)) = "f(f(d))", \quad f^A(f(f(d))) = "f(f(f(d)))", \quad \dots$$

$$R^A = \{d, f(d), f(f(d)), \dots, f(c_0), f(f(c_0)), \dots, f(c_1), f(f(c_1)), \dots\}.$$

Redukt  $\mathcal{A}$  na jazyk  $L$  je  $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A \rangle$ .



## Kanonický model s rovností

Je-li jazyk  $L$  s rovností,  $T^*$  označuje rozšíření  $T$  o axiomy rovnosti pro  $L$ .

Požadujeme-li, aby rovnost byla interpretovaná jako identita, kanonický model  $\mathcal{A}$  z bezesporné větve  $V$  dokončeného tabla z  $T^*$  musíme **faktorizovat** dle  $=^A$ .

Dle definice (3), v modelu  $\mathcal{A}$  z  $V$  pro relaci  $=^A$  platí, že pro každé  $s_1, s_2 \in A$ ,

$$s_1 =^A s_2 \Leftrightarrow T(s_1 = s_2) \text{ je položka na } V.$$

Jelikož  $V$  je dokončená a obsahuje axiomy rovnosti, relace  $=^A$  je ekvivalence na  $A$  a navíc **kongruence** pro všechny funkce a relace v  $\mathcal{A}$ .

**Kanonický model s rovností** z větve  $V$  je faktorstruktura  $\mathcal{A}/=^A$ .

**Pozorování** Pro každou formuli  $\varphi$ ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{A}/=^A) \models \varphi,$$

přičemž v  $\mathcal{A}$  je  $=$  interpretovaná relací  $=^A$ , zatímco v  $\mathcal{A}/=^A$  jako identita.

**Poznámka**  $\mathcal{A}$  je (spočetně) nekonečný model, ale  $\mathcal{A}/=^A$  může být konečný.

## Kanonický model s rovností - příklad

Nechť  $T = \{(\forall x)R(f(x)), (\forall x)(x = f(f(x)))\}$  je nad  $L = \langle R, f, d \rangle$  s rovností. Systematické tablo pro  $F \neg R(d)$  z  $T^*$  obsahuje bezespornou větev  $V$ .

V kanonickém modelu  $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A \rangle_{i \in \mathbb{N}}$  z  $V$  pro relaci  $=^A$  platí

$$s_1 =^A s_2 \iff s_1 = f(\cdots (f(s_2) \cdots)) \text{ nebo } s_2 = f(\cdots (f(s_1) \cdots)),$$

kde  $f$  je aplikováno  $2i$ -krát pro nějaké  $i \in \mathbb{N}$ .

Kanonický model s rovností z  $V$  je  $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/=^A) = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B, c_i^B \rangle_{i \in \mathbb{N}}$

$$(A/=^A) = \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \dots\},$$

$$d^B = [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^B([d]_{=^A}) = [f(d)]_{=^A}, \quad f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A}, \quad \dots$$

$$R^B = (A/=^A).$$

Redukt  $\mathcal{B}$  na jazyk  $L$  je  $\mathcal{B}' = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B \rangle$ .