

Výroková a predikátová logika - IX

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

Úplnost

Lemma Kanonický model \mathcal{A} z bezesporné dok. větve V se *shoduje* s V .

Důkaz Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na V .

- Pro φ **atomickou**, je-li $T\varphi$ na V , je $\mathcal{A} \models \varphi$ dle (3). Je-li $F\varphi$ na V , není $T\varphi$ na V , neboť V je bezesporná, a tedy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ dle (3).
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V , je $T\varphi$ a $T\psi$ na V , neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V , je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V , neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\psi$, tedy $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li $T(\forall x)\varphi(x)$ na V , je $T\varphi(x/t)$ na V pro každé $t \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ pro každé $t \in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\exists x)\varphi(x)$ na V .
- Je-li $T(\exists x)\varphi(x)$ na V , je $T\varphi(x/c)$ na V pro nějaké $c \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tedy $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\forall x)\varphi(x)$ na V . \square

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je *úplná*.

Věta Pro každou teorií T a sentenci φ , je-li φ pravdivá v T , je φ tablo dokazatelná z T , tj. $T \models \varphi \Rightarrow T \vdash \varphi$.

Důkaz Necht' φ je pravdivá v T . Ukážeme, že libovolné **dokončené** tablo (např. **systematické**) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je **sporné**.

- Kdyby ne, v tablu τ je nějaká bezesporná větev V .
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura \mathcal{A} pro jazyk L_C shodující se s větví V , speciálně s položkou $F\varphi$ v kořeni, tj. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.
- Necht' \mathcal{A}' je redukt struktury \mathcal{A} na původní jazyk L . Platí $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy \mathcal{A}' je modelem T (neboť \mathcal{A}' se shoduje s $T\psi$ pro každé $\psi \in T$).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T .

Tedy tablo τ je důkazem φ z T . \square

Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie jazyka L . Je-li sentence φ dokazatelná z T , řekneme, že φ je **věta (teorém)** teorie T . Množinu vět teorie T označme

$$\text{Thm}^L(T) = \{\varphi \in \text{Fm}_L \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- **sporná**, jestliže je v T dokazatelný \perp (spor), jinak je **bezesporná**,
- **kompletní**, jestliže není sporná a každá **sentence** je v ní dokazatelná či zamítnutelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$.
- **extenze** teorie T' jazyka L' , jestliže $L' \subseteq L$ a $\text{Thm}^{L'}(T') \subseteq \text{Thm}^L(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je **jednoduchá**, pokud $L = L'$, a **konzervativní**, pokud $\text{Thm}^{L'}(T') = \text{Thm}^L(T) \cap \text{Fm}_{L'}$,
- **ekvivalentní** s teorií T' , jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T .

Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek Pro každou teorii T a sentence φ, ψ jazyka L ,

- $T \vdash \varphi$ právě když $T \models \varphi$,
- $\text{Thm}^L(T) = \theta^L(T)$,
- T je sporná, právě když je sémanticky sporná, tj. nemá model,
- T je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má až na *elementární ekvivalenci* jediný model,
- $T, \varphi \vdash \psi$ právě když $T \vdash \varphi \rightarrow \psi$ (**Věta o dedukci**).

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

Löwenheim-Skolemova věta a kompaktnost

Věta Každá bezesporná teorie T spočetného jazyka L bez rovnosti má spočetně nekonečný model.

Důkaz Necht' τ je systematické tablo z T s $F\perp$ v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev V , neboť \perp není dokazatelný z T , existuje kanonický model \mathcal{A} z V . Jelikož se \mathcal{A} shoduje s V , jeho redukt na jazyk L je hledaným spočetně nekonečným modelem T . \square

Poznámka Jde o slabou verzi tzv. Löwenheim-Skolemovy věty. Ve spočetném jazyce s rovností je kanonický model s rovností spočetný.

Věta Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný \perp systematickým tablem τ . Jelikož je τ konečné, je \perp dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. \square

Nestandardní model přirozených čísel

Nechť $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel.

Označme $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ množinu všech pravdivých **sentencí** v $\underline{\mathbb{N}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme \underline{n} term $S(S(\dots(S(0)\dots)))$, tzv. ***n-tý numerál***, kde S je aplikováno n -krát.

Uvažme následující teorii T , kde c je nový konstantní symbol.

$$T = \text{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{ \underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N} \}$$

Pozorování Každá konečná část teorie T má model.

Tedy dle věty o kompaktnosti má T model \mathcal{A} , jde o **nestandardní model přirozených čísel**. Každá sentence z $\text{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ v něm platí, ale zároveň obsahuje prvek $c^{\mathcal{A}}$ větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tj. hodnota termu \underline{n} v \mathcal{A}).

Rozšiřování teorií

Ukážeme, že zavádění nových pojmů má “pomocný charakter”.

Tvrzení Necht' T je teorie jazyka L , T' je teorie jazyka L' a $L \subseteq L'$.

- (i) T' je extenze T , právě když **redukt** \mathcal{A} každého modelu \mathcal{A}' teorie T' na jazyk L je modelem teorie T ,
- (ii) T' je **konzervativní** extenze T , je-li T' extenze T a každý model \mathcal{A} teorie T lze **expandovat** do jazyka L' na model \mathcal{A}' teorie T' .

Důkaz

- (i)a) Je-li T' extenze T a φ libovolný axiom T , pak $T' \models \varphi$. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi$ a rovněž $\mathcal{A} \models \varphi$, z čehož plyne, že \mathcal{A} je modelem T .
- (i)b) Je-li \mathcal{A} modelem T a $T \models \varphi$, kde φ je jazyka L , pak $\mathcal{A} \models \varphi$ a rovněž $\mathcal{A}' \models \varphi$. Z toho plyne, že $T' \models \varphi$ a tedy T' je extenze T .
- (ii) Je-li $T' \models \varphi$, kde φ je nad L , a \mathcal{A} je model T , pak v nějaké jeho expanzi $\mathcal{A}' \models \varphi$ a tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z čehož $T \models \varphi$, tj. T' je konzervativní. \square

Extenze o definovaný relační symbol

Nechť T je teorie jazyka L , $\psi(x_1, \dots, x_n)$ je formule jazyka L ve volných proměnných x_1, \dots, x_n a L' je rozšíření L o nový n -ární relační symbol R .

Extenze teorie T o **definici** R formulí ψ je teorie T' vzniklá přidáním axiomu

$$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n)$$

Pozorování Každý model teorie T lze **jednoznačně** expandovat na model T' .

Důsledek T' je **konzervativní** extenze T .

Tvrzení Pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L , t.ž. $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz Každou podformuli $R(t_1, \dots, t_n)$ nahradíme za $\psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n)$, kde ψ' je vhodná varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů. \square

Např. symbol \leq lze zavést v jazyce aritmetiky pomocí axiomu

$$x_1 \leq x_2 \leftrightarrow (\exists y)(x_1 + y = x_2)$$

Extenze o definovaný funkční symbol

Nechť T je teorie jazyka L a pro formuli $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ jazyka L ve volných proměnných x_1, \dots, x_n, y platí

$$T \models (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y) \quad (\text{existence})$$

$$T \models \psi(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \psi(x_1, \dots, x_n, z) \rightarrow y = z \quad (\text{jednoznačnost})$$

Označme L' rozšíření L o nový n -ární funkční symbol f .

Extenze teorie T o **definici** f formulí ψ je teorie T' vzniklá přidáním axiomu

$$f(x_1, \dots, x_n) = y \leftrightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, y)$$

Poznámka Je-li ψ tvaru $t(x_1, \dots, x_n) = y$, kde x_1, \dots, x_n jsou proměnné termu t , podmínky existence a jednoznačnosti platí.

Např. binární funkční symbol – lze zavést pomocí + a unárního – axiomem

$$x_1 - x_2 = y \leftrightarrow x_1 + (-x_2) = y$$

Extenze o definovaný funkční symbol (pokr.)

Pozorování Každý model teorie T lze *jednoznačně* expandovat na model T' .

Důsledek T' je *konzervativní* extenze T .

Tvrzení Pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L , t.ž. $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Důkaz Stačí uvážit φ' s jediným výskytem f . Má-li φ' více výskytů f , lze postup aplikovat induktivně (v případě vnořených výskytů jdeme od vnitřních k vnějším). Označme φ^* formuli vzniklou z φ' nahrazením termu $f(t_1, \dots, t_n)$ za *novou* proměnnou z . Za φ vezmeme formuli

$$(\exists z)(\varphi^* \wedge \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)),$$

kde ψ' je vhodná varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů.

Nechť \mathcal{A} je model T' , e je ohodnocení, $a = f^A(t_1, \dots, t_n)[e]$. Díky oběma podmínkám platí $\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \dots, x_n/t_n, y/z)[e]$ právě když $e(z) = a$. Tedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi'[e]$$

pro každé ohodnocení e , tj. $\mathcal{A} \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ a tedy $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$. \square

Extenze o definice

Teorie T' jazyka L' je **extenze** teorie T jazyka L o **definice**, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definici relačního či funkčního symbolu.

Důsledek *Nechť T' je extenze teorie T o definice. Pak*

- *každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T' ,*
- *T' je konzervativní extenze T ,*
- *pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Např. v teorii $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ nad $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností lze zavést $<$ a unární funkční symbol – axiomy

$$-x = y \leftrightarrow x + y = 0$$

$$x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge \neg(x = y)$$

Pak formule $-x < y$ je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli

$$(\exists z)((z \leq y \wedge \neg(z = y)) \wedge x + z = 0).$$

Ekvisplnitelnost

Ukážeme, že problém splnitelnosti lze *redukovat* na otevřené teorie.

- Teorie T , T' jsou *ekvisplnitelné*, jestliže T má model $\Leftrightarrow T'$ má model.
- Formule φ je v *prenexním (normálním) tvaru (PNF)*, má-li tvar

$$(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)\varphi',$$

kde Q_i značí \forall nebo \exists , proměnné x_1, \dots, x_n jsou navzájem různé a φ' je otevřená formule, zvaná *otevřené jádro*. $(Q_1x_1) \dots (Q_nx_n)$ je tzv. *prefix*.

- Speciálně, jsou-li všechny kvantifikátory \forall , je φ *univerzální* formule.

K teorii T nalezneme ekvisplnitelnou otevřenou teorii následujícím postupem.

- (1) Axiomy teorie T nahradíme za ekvivalentní formule v *prenexním* tvaru.
- (2) Pomocí nových funkčních symbolů je převedeme na univerzální formule, tzv. *Skolemovy varianty*, čímž dostaneme ekvisplnitelnou teorii.
- (3) Jejich *otevřená jádra* budou tvořit hledanou teorii.

Vytýkání kvantifikátorů

Nechť Q značí kvantifikátor \forall nebo \exists a \bar{Q} značí opačný kvantifikátor.

Pro každé formule φ, ψ takové, že x **není volná** ve formuli ψ ,

$$\begin{aligned} \models & \quad \neg(Qx)\varphi \leftrightarrow (\bar{Q}x)\neg\varphi \\ \models & \quad ((Qx)\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \wedge \psi) \\ \models & \quad ((Qx)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (Qx)(\varphi \vee \psi) \\ \models & \quad ((Qx)\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\bar{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi) \\ \models & \quad (\psi \rightarrow (Qx)\varphi) \leftrightarrow (Qx)(\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Uvedené ekvivalence lze ověřit sémanticky nebo dokázat tablo metodou (přes generální uzávěr, není-li to sentence).

Poznámka Předpoklad, že x není volná ve formuli ψ je v každé ekvivalenci (kromě té první) nutný pro nějaký kvantifikátor Q . Např.

$$\not\models ((\exists x)P(x) \wedge P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x) \wedge P(x))$$

Převod na prenexní tvar

Tvrzení Necht' φ' je formule vzniklá z formule φ nahrazením některých výskytů podformule ψ za formuli ψ' . Jestliže $T \models \psi \leftrightarrow \psi'$, pak $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule φ . \square

Tvrzení Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule φ' v *prenexním normálním tvaru*, tj. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.

Důkaz Inducí dle struktury φ pomocí **vytýkání kvantifikátorů**, náhradou podformulí za jejich **varianty** a využitím předchozího tvrzení o ekvivalenci. \square

Např.

$$\begin{aligned} ((\forall z)P(x, z) \wedge P(y, z)) &\rightarrow \neg(\exists x)P(x, y) \\ ((\forall u)P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall x)\neg P(x, y) \\ (\forall u)(P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v, y) \\ (\exists u)((P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow (\forall v)\neg P(v, y)) \\ (\exists u)(\forall v)((P(x, u) \wedge P(y, z)) &\rightarrow \neg P(v, y)) \end{aligned}$$