

# Výroková a predikátová logika - XII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/22

# Izomorfismus struktur

Nechť  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  jsou struktury jazyka  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ .

- **Bijekce**  $h: A \rightarrow B$  je **izomorfismus** struktur  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$ , pokud platí zároveň
  - $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$   
pro každý  $n$ -ární funkční symbol  $f \in \mathcal{F}$  a každé  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,
  - $R^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow R^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$   
pro každý  $n$ -ární relační symbol  $R \in \mathcal{R}$  a každé  $a_1, \dots, a_n \in A$ .
- $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  jsou **izomorfní** (via  $h$ ), psáno  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  ( $\mathcal{A} \simeq_h \mathcal{B}$ ), pokud existuje izomorfismus  $h$  struktur  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$ . Říkáme rovněž, že  $\mathcal{A}$  je **izomorfní s**  $\mathcal{B}$ .
- **Automorfismus** struktury  $\mathcal{A}$  je izomorfismus  $\mathcal{A}$  s  $\mathcal{A}$ .

*Např. potenční algebra  $\mathcal{P}(X) = \langle \mathcal{P}(X), -, \cap, \cup, \emptyset, X \rangle$  s  $X = n$  je izomorfní s Booleovou algebrou  $\underline{n}2 = \langle {}^n2, -, \wedge_n, \vee_n, \mathbf{0}_n, \mathbf{1}_n \rangle$  via  $h: A \mapsto \chi_A$ , kde  $\chi_A$  je charakteristická funkce množiny  $A \subseteq X$ .*

# Izomorfismus a sémantika

Uvidíme, že izomorfismus zachovává sémantiku.

**Tvrzení** Necht'  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  jsou struktury jazyka  $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ . Bijekce  $h: A \rightarrow B$  je **izomorfismus**  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$ , právě když platí zároveň

- (i)  $h(t^{\mathcal{A}}[e]) = t^{\mathcal{B}}[e \circ h]$  pro každý term  $t$  a  $e: \text{Var} \rightarrow A$ ,
- (ii)  $\mathcal{A} \models \varphi[e] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[e \circ h]$  pro každou formuli  $\varphi$  a  $e: \text{Var} \rightarrow A$ .

**Důkaz** ( $\Rightarrow$ ) Indukcí dle struktury termu  $t$ , respektive formule  $\varphi$ .

( $\Leftarrow$ ) Dosazením termu  $f(x_1, \dots, x_n)$  do (i) či atomické formule  $R(x_1, \dots, x_n)$  do (ii) pro ohodnocení  $e(x_i) = a_i$  máme, že  $h$  vyhovuje def. izomorfismu.  $\square$

**Důsledek** Pro každé struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  stejného jazyka,

$$\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

**Poznámka** Obrácená implikace **obecně** neplatí, např.  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ , ale  $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle \not\equiv \langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ , neboť  $|\mathbb{Q}| = \omega$  a  $|\mathbb{R}| = 2^\omega$ .

# Konečné modely s rovností

**Tvrzení** Pro každé *konečné* struktury  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  stejného jazyka s *rovností*,

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}.$$

**Důkaz** Je  $|A| = |B|$ , neboť lze vyjádřit “*existuje právě  $n$  prvků*”.

- Nechť  $\mathcal{A}'$  je expanze  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L' = L \cup \{c_a\}_{a \in A}$  o *jména prvků* z  $A$ .
- Ukážeme, že  $\mathcal{B}$  lze expandovat na  $\mathcal{B}'$  do jazyka  $L'$  tak, že  $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$ . Pak zřejmě  $h: a \mapsto c_a^{B'}$  je izomorfismus  $\mathcal{A}'$  s  $\mathcal{B}'$  a tedy i izomorfismus  $\mathcal{A}$  s  $\mathcal{B}$ .
- Stačí ukázat, že pro každé  $c_a^{A'} = a \in A$  existuje  $b \in B$  t.ž.  $\langle \mathcal{A}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$ .
- Označme  $\Omega$  množinu formulí  $\varphi(x)$  t.ž.  $\langle \mathcal{A}, a \rangle \models \varphi(x/c_a)$ , tj.  $\mathcal{A} \models \varphi[e(x/a)]$ .
- Jelikož je  $A$  konečné, existuje konečně formulí  $\varphi_0(x), \dots, \varphi_m(x)$  tak, že pro každé  $\varphi \in \Omega$  je  $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \varphi_i$  pro nějaké  $i$ .
- Jelikož  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \models (\exists x) \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i$ , existuje  $b \in B$  t.ž.  $\mathcal{B} \models \bigwedge_{i \leq m} \varphi_i[e(x/b)]$ .
- Tedy pro každou  $\varphi \in \Omega$  je  $\mathcal{B} \models \varphi[e(x/b)]$ , tj.  $\langle \mathcal{B}, b \rangle \models \varphi(x/c_a)$ .  $\square$

**Důsledek** Má-li *kompletní* teorie jazyka s *rovností* *konečný* model, jsou *všechny její modely izomorfní*.

# Kategoričnost

- *Izomorfní spektrum* teorie  $T$  je počet  $I(\kappa, T)$  navzájem neizomorfních modelů teorie  $T$  pro každou **kardinalitu**  $\kappa$ .
- Teorie  $T$  je  **$\kappa$ -kategoričná**, pokud má až na izomorfismus právě jeden model kardinality  $\kappa$ , tj.  $I(\kappa, T) = 1$ .

**Tvrzení** Teorie DeLO (tj. “bez konců”) je  $\omega$ -kategoričná.

**Důkaz** Nechť  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DeLO}$  s  $A = \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}, B = \{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Indukcí dle  $n$  lze nalézt prosté **parciální** funkce  $h_n \subseteq h_{n+1} \subset A \times B$  **zachovávající uspořádání** tak, že  $\{a_i\}_{i < n} \subseteq \text{dom}(h_n)$  a  $\{b_i\}_{i < n} \subseteq \text{rng}(h_n)$ . Pak  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$  via  $h = \cup h_n$ .  $\square$

*Obdobně dostaneme, že např.  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, \leq \rangle, \mathcal{A} \upharpoonright (0, 1], \mathcal{A} \upharpoonright [0, 1), \mathcal{A} \upharpoonright [0, 1]$  jsou až na izomorfismus všechny spočetné modely teorie DeLO\*.* Pak

$$I(\kappa, \text{DeLO}^*) = \begin{cases} 0 & \text{pro } \kappa \in \mathbb{N}, \\ 4 & \text{pro } \kappa = \omega. \end{cases}$$

# $\omega$ -kategorické kritérium kompletnosti

**Věta** *Nechť jazyk  $L$  je spočetný.*

- (i) Je-li teorie  $T$  jazyka  $L$  bez rovnosti  $\omega$ -kategorická, je kompletní.*
- (ii) Je-li teorie  $T$  jazyka  $L$  s rovností  $\omega$ -kategorická a bez konečného modelu, je kompletní.*

**Důkaz** Každý model teorie  $T$  je elementárně ekvivalentní s nějakým spočetně nekonečným modelem  $T$ , ale ten je až na izomorfismus jediný. Tedy všechny modely  $T$  jsou elementárně ekvivalentní, tj.  $T$  je kompletní.  $\square$

*Např. teorie  $DeLO$ ,  $DeLO^+$ ,  $DeLO^-$ ,  $DeLO^\pm$  jsou kompletní a jsou to všechny (navzájem neekvivalentní) jednoduché kompletní extenze teorie  $DeLO^*$ .*

**Poznámka** *Obdobné kritérium platí i pro vyšší kardinality než  $\omega$ .*

# Definovatelné množiny

Zajímá nás, které množiny lze v dané struktuře zdefinovat.

- **Množina definovaná formulí**  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  **ve struktuře**  $\mathcal{A}$  je množina

$$\varphi^{\mathcal{A}}(x_1, \dots, x_n) = \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(x_1/a_1, \dots, x_n/a_n)]\}.$$

Zkráceným zápisem,  $\varphi^{\mathcal{A}}(\bar{x}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a})]\}$ , kde  $|\bar{x}| = n$ .

- **Množina definovaná formulí**  $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$  **s parametry**  $\bar{b} \in A^{|\bar{y}|}$  **ve struktuře**  $\mathcal{A}$  je

$$\varphi^{\mathcal{A}, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y}) = \{\bar{a} \in A^{|\bar{x}|} \mid \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})]\}.$$

*Např. pro  $\varphi = E(x, y)$  je  $\varphi^{\mathcal{G}, b}(x, y)$  množina sousedů vrcholu  $b$  v grafu  $\mathcal{G}$ .*

- Pro strukturu  $\mathcal{A}$ , množinu  $B \subseteq A$  a  $n \in \mathbb{N}$  označme  $\mathbf{Df}^n(\mathcal{A}, B)$  třídu všech množin  $D \subseteq A^n$  definovatelných ve struktuře  $\mathcal{A}$  s parametry z  $B$ .

**Pozorování**  $\mathbf{Df}^n(\mathcal{A}, B)$  je uzavřená na doplněk, sjednocení, průnik a obsahuje  $\emptyset, A^n$ . Tedy tvoří podalgebru potenční algebry  $\mathcal{P}(A^n)$ .

# Definovatelnost a automorfismy

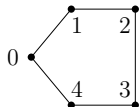
Ukážeme, že definovatelné množiny jsou invariantní na automorfismy.

**Tvrzení** Necht'  $D \subseteq A^n$  je množina definovatelná ve struktuře  $\mathcal{A}$  z parametrů  $\bar{b}$  a  $h$  je *automorfismus*  $\mathcal{A}$ , který je *identický* na  $\bar{b}$ . Pak  $h[D] = D$ .

**Důkaz** Necht'  $D = \varphi^{A, \bar{b}}(\bar{x}, \bar{y})$ . Pak pro každé  $\bar{a} \in A^{|\bar{x}|}$

$$\begin{aligned} \bar{a} \in D &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[(e \circ h)(\bar{x}/\bar{a}, \bar{y}/\bar{b})] \\ &\Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/h(\bar{b}))] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[e(\bar{x}/h(\bar{a}), \bar{y}/\bar{b})] \Leftrightarrow h(\bar{a}) \in D. \end{aligned}$$

*Např. graf  $\mathcal{G}$  má právě jeden netrivi. automorfismus  $h$  zachovávající vrchol 0.*



$$h(0) = 0, \quad h(1) = 4, \quad h(2) = 3, \quad h(3) = 2, \quad h(4) = 1$$

$$\{0\} = (x = y)^{\mathcal{G}, 0}, \quad \{1, 4\} = (E(x, y))^{\mathcal{G}, 0}, \quad \{2, 3\} = (x \neq y \wedge \neg E(x, y))^{\mathcal{G}, 0}$$

*Navíc množiny  $\{0\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 3\}$  jsou definovatelné z parametru 0. Tedy*

$$\text{Df}^1(\mathcal{G}, \{0\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{0, 1, 4\}, \{0, 2, 3\}, \{1, 4, 2, 3\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}\}.$$



# Axiomatizovatelnost

*Zajímá nás, zda se daná část světa dá “dobře” popsat.*

Nechť  $K \subseteq M(L)$  je třída struktur jazyka  $L$ . Řekneme, že  $K$  je

- **axiomatizovatelná**, pokud existuje teorie  $T$  jazyka  $L$  s  $M(T) = K$ ,
- **konečně axiomatizovatelná**, pokud je axiomatizovatelná **konečnou** teorií,
- **otevřeně axiomatizovatelná**, pokud je axiomatizovatelná **otevřenou** teorií,
- **teorie  $T$  je konečně (otevřeně) axiomatizovatelná**, pokud  $M(T)$  je konečně (respektive otevřeně) axiomatizovatelná.

**Pozorování** *Je-li  $K$  axiomatizovatelná, je uzavřená na elem. ekvivalenci.*

*Například*

- lineární uspořádání jsou konečně i otevřeně axiomatizovatelná,*
- tělesa jsou konečně axiomatizovatelná, ale ne otevřeně,*
- nekonečné grupy jsou axiomatizovatelné, ale ne konečně.*

## Důsledek kompaktnosti

**Věta** Má-li teorie  $T$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$  alespoň  $n$ -prvkový model, má i nekonečný model.

**Důkaz** V jazyce bez rovnosti je to zřejmé, uvažme jazyk s rovností.

- Označme  $T' = T \cup \{c_i \neq c_j \mid \text{pro } i \neq j\}$  extenzi teorie  $T$  v rozšířeném jazyce o spočetně nekonečně mnoho nových konstantních symbolů  $c_i$ .
- Dle předpokladu má každá konečná část teorie  $T'$  model.
- Tedy dle věty o **kompaktnosti** má  $T'$  model, ten je nutně nekonečný.
- Jeho redukt na původní jazyk je hledaný nekonečný model teorie  $T$ . □

**Důsledek** Má-li teorie  $T$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$  alespoň  $n$ -prvkový model, není třída všech jejích konečných modelů axiomatizovatelná.

*Např. nelze axiomatizovat konečné grupy, konečná tělesa, atd. Avšak třída nekonečných modelů teorie  $T$  jazyka s rovností je axiomatizovatelná.*

# Konečná axiomatizovatelnost

**Věta** Necht'  $K \subseteq M(L)$  a  $\bar{K} = M(L) \setminus K$ , kde  $L$  je jazyk. Pak  $K$  je *konečně axiomatizovatelná*, právě když  $K$  i  $\bar{K}$  jsou axiomatizovatelné.

**Důkaz** ( $\Rightarrow$ ) Je-li  $T$  konečná axiomatizace  $K$  v *uzavřeném* tvaru, pak teorie s jediným axiomem  $\bigvee_{\varphi \in T} \neg \varphi$  axiomatizuje  $\bar{K}$ . Nyní dokažme ( $\Leftarrow$ ).

- Necht'  $T, S$  jsou teorie jazyka  $L$  takové, že  $M(T) = K$ ,  $M(S) = \bar{K}$ .
- Pak  $M(T \cup S) = M(T) \cap M(S) = \emptyset$  a dle věty o *kompaktnosti* existují konečné  $T' \subseteq T$  a  $S' \subseteq S$  takové, že  $\emptyset = M(T' \cup S') = M(T') \cap M(S')$ .
- Jelikož

$$M(T) \subseteq M(T') \subseteq \overline{M(S')} \subseteq \overline{M(S)} = M(T),$$

je  $M(T) = M(T')$ , tj. konečná  $T'$  axiomatizuje  $K$ .  $\square$

## Konečná axiomatizovatelnost - příklad

Nechť  $T$  je teorie těles. Řekneme, že těleso  $\mathcal{A} = \langle A, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  je

- **charakteristiky 0**, neexistuje-li žádné  $p \in \mathbb{N}^+$  takové, že  $\mathcal{A} \models p1 = 0$ , kde  $p1$  značí term  $1 + 1 + \dots + 1$  ( $+$  aplikováno  $(p - 1)$ -krát).
- **charakteristiky  $p$** , kde  $p$  je prvočíslo, je-li  $p$  je nejmenší t.ž.  $\mathcal{A} \models p1 = 0$ .
- Třída těles charakteristiky  $p$  pro  $p$  prvočíslo je **konečně** axiomatizována teorií  $T \cup \{p1 = 0\}$ .
- Třída těles charakteristiky 0 je axiomatizována (**nekonečnou**) teorií  $T' = T \cup \{p1 \neq 0 \mid p \in \mathbb{N}^+\}$ .

**Tvrzení** Třída  $K$  těles charakteristiky 0 není **konečně** axiomatizovatelná.

**Důkaz** Stačí dokázat, že  $\bar{K}$  není axiomatizovatelná. Kdyby  $M(S) = \bar{K}$ , tak  $S' = S \cup T'$  má model  $\mathcal{B}$ , neboť každá konečná  $S^* \subseteq S'$  má model (těleso prvočíselné charakteristiky větší než jakékoliv  $p$  vyskytující se v axiomech  $S^*$ ). Pak ale  $\mathcal{B} \in M(S) = \bar{K}$  a zároveň  $\mathcal{B} \in M(T') = K$ , což není možné.  $\square$