

Výroková a predikátová logika - dodatek

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2021/2022

Množinové pojmy

Veškeré pojmy zavádíme v rámci **teorie množin** pouze pomocí predikátu náležení a rovnosti (a prostředků logiky).

- Množinová vlastnost $\varphi(x)$ definuje **třidu** $\{x \mid \varphi(x)\}$. Třída, která není množinou, se nazývá **vlastní**, např. $\{x \mid x = x\}$.
- $x \notin y$, $x \neq y$ jsou zkratkou za $\neg(x \in y)$, $\neg(x = y)$.
- $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ označuje množinu obsahující právě x_0, \dots, x_{n-1} , $\{x\}$ se nazývá **singleton**, $\{x, y\}$ **neuspořádaná dvojice**.
- \emptyset , \cup , \cap , \setminus , Δ značí **prázdnou množinu**, **sjednocení**, **průnik**, **rozdíl**, **symetrický rozdíl** množin, např.

$$x \Delta y = (x \setminus y) \cup (y \setminus x) = \{z \mid (z \in x \wedge z \notin y) \vee (z \notin x \wedge z \in y)\}$$

- x, y jsou **disjunktní** pokud $x \cap y = \emptyset$. $x \subseteq y$ značí, že x je **podmnožinou** y .
- **Potenční množina** (**potence**) x je $\mathcal{P}(x) = \{y \mid y \subseteq x\}$.
- **Sjednocení** (**suma**) x je $\bigcup x = \{z \mid \exists y(z \in y \wedge y \in x)\}$.
- **Pokrytí** množiny x je množina $y \subseteq \mathcal{P}(x) \setminus \{\emptyset\}$ s $\bigcup y = x$. Jsou-li navíc každé dvě (různé) množiny v, y disjunktní, je y **rozklad** x .

Relace

- **uspořádaná dvojice** je $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$, tedy $(x, x) = \{x, \{x\}\}$,
uspořádaná n -tice je $(x_0, \dots, x_{n-1}) = ((x_0, \dots, x_{n-2}), x_{n-1})$ pro $n > 2$,
- **kartézský součin** je $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$,
kartézská mocnina je $x^0 = \{\emptyset\}$, $x^1 = x$, $x^n = x^{n-1} \times x$ pro $n > 1$,
- **disjunktní sjednocení** je $x \uplus y = (\{\emptyset\} \times x) \cup (\{\{\emptyset\}\} \times y)$,
- **relace** je jakákoliv množina R uspořádaných dvojic,
 namísto $(x, y) \in R$ píšeme obvykle $R(x, y)$ nebo $x R y$,
definiční obor (doména) R je $\text{dom}(R) = \{x \mid \exists y (x, y) \in R\}$,
obor hodnot R je $\text{rng}(R) = \{y \mid \exists x (x, y) \in R\}$,
extenze prvku x v R je $R[x] = \{y \mid (x, y) \in R\}$,
inverzní relace k R je $R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$,
restrikce R na množinu z je $R \upharpoonright z = \{(x, y) \in R \mid x \in z\}$,
- **složení** relací R a S je relace $R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S)\}$,
- **identita** na množině z je relace $\text{Id}_z = \{(x, x) \mid x \in z\}$.

Ekvivalence

- Relace R je **ekvivalence** na X , pokud pro všechna $x, y, z \in X$ platí

$$R(x, x) \quad (\text{reflexivita})$$

$$R(x, y) \rightarrow R(y, x) \quad (\text{symetrie})$$

$$R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z) \quad (\text{tranzitivita})$$

- $R[x]$ se nazývá **třída ekvivalence** (**faktor**) prvku x dle R , značíme i $[x]_R$.
- $X/R = \{R[x] \mid x \in X\}$ je **faktoriace** množiny X dle R .
- Platí, že X/R je rozklad X , neboť třídy jsou disjunktní a pokrývají X .
- Naopak, je-li S rozklad X , určuje ekvivalenci (na X)

$$\{(x, y) \mid x \in z, y \in z \text{ pro nějaké } z \in S\}.$$

Uspořádání

Nechť \leq je relace na množině X . Řekneme, že \leq je

- **částečné uspořádání** (množiny X), pokud pro všechna $x, y, z \in X$

$$x \leq x \quad (\text{reflexivita})$$

$$x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \quad (\text{antisymetrie})$$

$$x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \quad (\text{tranzitivita})$$

- **lineární (totální) uspořádání**, pokud navíc pro všechna $x, y \in X$

$$x \leq y \vee y \leq x \quad (\text{dichotomie})$$

- **dobré uspořádání**, pokud navíc každá neprázdná podmnožina X obsahuje **nejmenší** prvek.

Označme ' $x < y$ ' za ' $x \leq y \wedge x \neq y$ '. Lineární uspořádání \leq na X je

- **husté uspořádání**, pokud X není singleton a pro všechna $x, y \in X$

$$x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y) \quad (\text{hustota})$$

Funkce

Relace f je **funkce**, pokud pro každé $x \in \text{dom}(f)$ existuje jediné y s $(x, y) \in f$.

- Pak říkáme, že y je **hodnotou** funkce f v x , píšeme $f(x) = y$,
- $f: X \rightarrow Y$ značí, že f je funkce s $\text{dom}(f) = X$ a $\text{rng}(f) \subseteq Y$,
- funkce f je **na (surjektivní)** Y , pokud $\text{rng}(f) = Y$,
- funkce f je **prostá (injektivní)**, pokud pro všechna $x, y \in \text{dom}(f)$

$$x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$$

- $f: X \rightarrow Y$ je **bijekce** X a Y , je-li prostá a na Y ,
- je-li $f: X \rightarrow Y$ prostá, pak $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$ je **inverzní funkce**,
- **obraz** množiny A přes f je $f[A] = \{y \mid (x, y) \in f \text{ pro nějaké } x \in A\}$,
- je-li $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$, pak pro jejich **složení** platí $(f \circ g): X \rightarrow Z$ a

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

- ${}^X Y$ značí množinu všech funkcí z X do Y .

Čísla

Uvedeme příklady explicitních konstrukcí.

- **Přirozená čísla** definujeme induktivně vztahem $n = \{0, \dots, n-1\}$, tedy

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\} = \{\emptyset\}, \quad 2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \dots$$

- množina **přirozených** čísel \mathbb{N} je definována jako nejmenší množina obsahující \emptyset uzavřená na $S(x) := x \cup \{x\}$ (**následník**).
- množina **celých** čísel je $\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim$, kde \sim je ekvivalence definovaná

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ právě když } a + d = b + c$$

- množina **racionálních** čísel je $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) / \approx$, kde \approx je dána

$$(a, b) \approx (c, d) \text{ právě když } a \cdot d = b \cdot c$$

- množina **reálných** čísel \mathbb{R} je množina **řezů** racionálních čísel, tj. netriviálních, dolů uzavřených podmnožin \mathbb{Q} bez **největšího** prvku. ($A \subset \mathbb{Q}$ je **dolů uzavřená**, pokud $y < x \in A$ implikuje $y \in A$.)

Velikosti množin

- x má **stejnou nebo menší velikost** než y (x je **subvalentní** y),
pokud existuje prostá funkce $f: x \rightarrow y$, $(x \preceq y)$
- x má **stejnou velikost** jako y , existuje-li bijekce $f: x \rightarrow y$, $(x \approx y)$
- x má **menší velikost** než y , pokud $x \preceq y$ a není $x \approx y$, $(x \prec y)$

Věta (Cantor) $x \prec \mathcal{P}(x)$ pro každou množinu x .

Důkaz $f(y) = \{y\}$ pro $y \in x$ je prostá funkce $f: x \rightarrow \mathcal{P}(x)$, tedy $x \preceq \mathcal{P}(x)$.

Pro spor předpokládejme, že existuje prostá $g: \mathcal{P}(x) \rightarrow x$. Definujme

$$y = \{g(z) \mid z \subseteq x \wedge g(z) \notin z\}$$

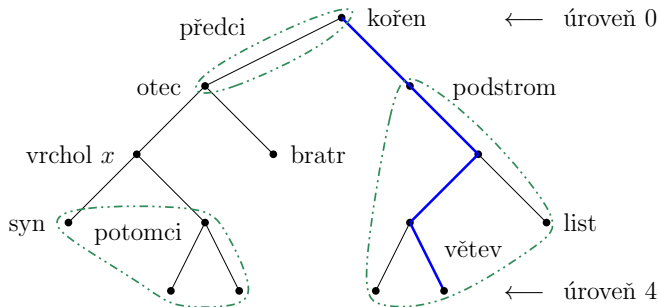
Dle definice, $g(y) \in y$ právě když $g(y) \notin y$, spor. \square

- pro každé x existuje **kardinální číslo** κ s $x \approx \kappa$, značíme $|x| = \kappa$,
- x je **konečná**, pokud $|x| = n$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, jinak je **nekonečná**,
- x je **spočetná**, pokud je konečná nebo $|x| = |\mathbb{N}| = \omega$; jinak je **nespočetná**,
- x má **mohutnost kontinua**, pokud $|x| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

n -ární relace a funkce

- Relace *arity* (*četnosti*) $n \in \mathbb{N}$ na X je libovolná množina $R \subseteq X^n$, tedy pro $n = 0$ je $R = \emptyset = 0$ nebo $R = \{\emptyset\} = 1$, pro $n = 1$ je $R \subseteq X$,
- (Částečná) funkce *arity* (*četnosti*) $n \in \mathbb{N}$ z X do Y je libovolná funkce $f \subseteq X^n \times Y$. Řekneme, že f je *totální* na X^n , pokud $\text{dom}(f) = X^n$, značíme $f: X^n \rightarrow Y$. Je-li navíc $Y = X$, je to *operace* na X .
- Funkce $f: X^n \rightarrow Y$ je *konstantní*, pokud $\text{rng}(f) = \{y\}$ pro nějaké $y \in Y$, pro $n = 0$ je $f = \{(\emptyset, y)\}$ a f ztotožňujeme s *konstantou* y .
- Aritu relace či funkce značíme $\text{ar}(R)$ či $\text{ar}(f)$ a mluvíme o *nulárních*, *unárních*, *binárních*, obecně *n -árních* relacích a funkcích (operacích).

Stromy



- **Strom** je množina T s částečným uspořádáním $<_T$, ve kterém existuje (jedinečný) **nejmenší** prvek, zvaný **kořen**, a množina předků libovolného prvku je **dobře uspořádaná**,
- **větev** stromu T je **maximální** lineárně uspořádaná podmnožina T ,
- adoptujeme standardní terminologii o stromech z teorie grafů, pak např.
větev v konečném stromu je cesta z kořene do listu.

Königovo lemma

Budeme pracovat (*pro jednoduchost*) obvykle s konečně větvičími se stromy, ve kterých má každý vrchol kromě kořene **bezprostředního** předka (*otce*).

- ***n -tá úroveň*** stromu T pro $n \in \mathbb{N}$ je daná indukci, obsahuje syny vrcholů z $(n - 1)$ -ní úrovně, 0-tá úroveň obsahuje právě kořen,
- ***hloubka*** stromu T je maximální číslo $n \in \mathbb{N}$ neprázdné úrovně; pokud má T nekonečnou větev, je ***hloubka nekonečná*** či ω .
- strom T je ***n -ární*** pro $n \in \mathbb{N}$, pokud každý vrchol má **nejvýše** n synů. Je ***konečně větvičí se***, má-li každý vrchol konečně mnoho synů.

Lemma (König) *Každý nekonečný, konečně větvičí se strom T obsahuje nekonečnou větev.*

Důkaz Hledání nekonečné větve začneme v kořeni. Jelikož má jen konečně mnoho synů, existuje syn s nekonečně mnoha potomky. *Vybereme* ho a stejně pokračujeme v jeho podstromě. Takto získáme nekonečnou větev. □

Uspořádané stromy

- *Uspořádaný strom* je strom T , s kterým je dáno lineární uspořádání synů každého vrcholu, toto uspořádání se nazývá *pravolevé* a značí $<_L$. Oproti tomu, uspořádání $<_T$ se nazývá *stromové*.
- *značený strom* je strom T s libovolnou funkcí (*značící funkce*), která každému vrcholu T přiřazuje nějaký objekt (*značku*).
- značené uspořádané stromy např. zachycují strukturu formulí

