

## Zkouška VPL - písemná část

5. ledna 2022

1. Na rodinné poradě před nákupem auta padly následující požadavky.

- (i) *Nechci spalovací motor s automatickým řazením.*
- (ii) *U elektroauta chci zelenou barvu.*
- (iii) *Když červené, tak jediné elektroauto s automatickým řazením.*

Navíc víme, že

- (iv) *Auta mají právě jednu barvu: červenou/zelenou/modrou, právě jeden druh motoru: spalovací/elektrický, právě jeden druh převodovky: manuální/automatickou.*
- (v) *V nabídce nejsou zelená auta s manuálním řazením.*

Chceme (pomocí rezoluce) dokázat za těchto předpokladů, že

- (vi) *Mohou si koupit modré spalovací auto s manuálem nebo zelené elektro s automatikou.*
- (a) Zapište tvrzení (i) až (vi) jako výroky  $\varphi_1$  až  $\varphi_6$  nad prvovýroky  $\mathbb{P} = \{r, g, b, s, e, m, a\}$ , přičemž  $r, g, b$  znamená (po řadě), že “auto, které si rodina může koupit, má červenou/zelenou/modrou barvu, dále  $s, e$  znamená, že “má spalovací/elektrický motor” a  $m, a$  znamená, že “má manuální/automatické řazení”. (2b)
- (b) Označme  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_5\}$ . Pomocí předchozích formulí napište teorii  $S$  nad  $\mathbb{P}$ , která je nespíitelná, právě když  $T \models \varphi_6$ . Převed'te  $S$  do CNF a vyjádřete ji v množinové reprezentaci. (2b)
- (c) Nalezněte teorii  $S'$  nad  $\mathbb{P}' = \{r, g, b, s, m\}$  takovou, že  $S$  je konzervativní extenzí  $S'$  (aniž bychom věděli, zda  $S$  je splnitelná). (1b)
- (d) Rezolucí dokažte, že  $S'$  je nespíitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. Pozn: *nebudete-li mít teorii  $S'$ , dokažte, že  $S$  je nespíitelná.* (4b)
- (e) Zjistěte, kolik v teorii  $T$  navzájem neekvivalentních požadavků je dále možné klást, aniž by rodina přišla o možnost si auto koupit. Uveďte zdůvodnění. (2b)

2. Nechť  $T = \{\neg(\forall x)(\exists y)P(x, y), (\forall x)(\exists y)R(x, y), (\forall x)(\exists y)(\neg P(x, y) \rightarrow \neg(\exists x)R(y, x))\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, R \rangle$  bez rovnosti, kde  $P, R$  jsou binární relační symboly.

- (a) Skolemizací nalezněte k  $T$  ekvivalentní teorii  $T'$  (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
- (b) Tablo metodou dokažte, že  $T'$  je nespíitelná. (3b)
- (c) Nechť  $T''$  je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie  $T'$ . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $T''$ , která je nespíitelná. (2b)
- (d) Má teorie  $T$  jednoduchou kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)

3. Nechť  $T$  označuje teorii těles jazyka  $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  a  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$  je (standardní) těleso reálných čísel.

- (a) Napište formuli jazyka  $L$ , která v struktuře  $\mathcal{A}$  definuje (bez parametrů) množinu  $\{-\sqrt{2}\}$ . (2b)
- (b) Je teorie  $T' = T \cup \{f(x) = y \leftrightarrow y \cdot y = -x\}$  (korektní) extenzí teorie  $T$  o definici funkčního symbolu  $f$ ? Uveďte zdůvodnění. (2b)