Zkouška VPL - písemná část

11. února 2022

1. Nechť $T = \{p \vee q \to r, \neg(p \to \neg s)\}$ je teorie nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.
   - (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F(p \vee \neg q)$ v kořeni. *(3b)*
   - (b) Je formule $q \to p$ pravdivá v teorii T? Je lživá? Je nezávislá? Zdůvodněte. *(2b)*
   - (c) Určete všechny modely teorie T. *(1b)*
   - (d) Najděte teorii S nad množinou prvovýroků $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$ takovou, že T je konzervativní extenzí S. Axiomatizujte S pomocí výroku v CNF. Zdůvodněte, proč S má požadovanou vlastnost. *(2b)*
   - (e) Určete počet neekvivalentních výroků φ nad $\mathbb{P}$ takových, že φ je pravdivý v T a nezávislý v S. *(2b)*

2. Předpokládejme, že:
   - *(i)* Každý, kdo složí zkoušku z logiky a vyhraje v loterii, se raduje.
   - *(ii)* Každý, kdo studuje nebo má štěstí, složí zkoušku z čehokoliv.
   - *(iii)* Alfred nestuduje, ale má štěstí.
   - *(iv)* Každý, kdo má štěstí, vyhraje v loterii.

   Chceme rezolucí ukázat, že

   - *(v)* Alfred se raduje.

   Konkrétně:

   - (a) Zapište tvrzení *(i)*–*(v)* pomocí <u>sentencí</u> $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle Z, S, R, M, V, a, l \rangle$ bez rovnosti, kde $Z(x, y)$ je binární predikát, který vyjadřuje, že "x složí zkoušku z y", $S(x)$, $R(x)$, $M(x)$ a $V(x)$ jsou unární predikáty vyjadřující (po řadě), že "x studuje", "x se raduje", "x má štěstí" a "x vyhraje v loterii" a symboly a a l jsou konstantní symboly označující po řadě "Alfreda" a "logiku". *(2b)*
   - (b) Označme $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$. Pomocí skolemizace formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ případně jejich negací vytvořte otevřenou teorii S, která je sporná, právě tehdy, když $T \models \varphi_5$. Zapište S v množinové reprezentaci. *(2b)*
   - (c) Pomocí rezoluce ukažte, že S je sporná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. Uveďte použité unifikace. *(3b)*
   - (d) Najděte konjunkci základních instancí axiomů teorie S, která je nesplnitelná. *(2b)*
   - (e) Je $S \vdash_{LI} \square$? Zdůvodněte. *(1b)*

3. Nechť $T = \{(\forall x)U(f(x)), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že "existují právě 3 prvky".
   - (a) Určete počet modelů teorie T (až na izomorfismus). *(2b)*
   - (b) Nechť $S = \{U(c_1), U(c_2), U(c_3), f(x) = c_1 \vee f(x) = c_2 \vee f(x) = c_3\}$ je teorie v jazyce $\langle U, f, c_1, c_2, c_3 \rangle$ s rovností, kde c_1, c_2, c_3 jsou konstantní symboly. Je S extenzí teorie T? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte. *(2b)*