

Zkouška VPL - písemná část

13. dubna 2022

1. (*Dirichletův princip*). Necht' $n \geq 2$ je pevné přirozené číslo. Předpokládejme, že máme n holubů a $n - 1$ budce. Chceme (rezolucí) ukázat, že není možné, aby platilo zároveň, že

- (i) každý holub sedí v nějaké budce,
- (ii) v žádné budce nesedí víc než jeden holub.

Necht' $\mathbb{P} = \{p_j^i \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1\}$ je množina prvovýroků, kde p_j^i reprezentuje, že “ i -tý holub sedí v j -té budce”.

- (a) Napište výroky φ_i a ψ_j nad \mathbb{P} vyjadřující, že “ i -tý holub sedí v nějaké budce”, resp. “v j -té budce nesedí víc než jeden holub”, kde $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1$. Pomocí výroků φ_i a ψ_j sestrojte teorii T_n vyjadřující (i) a (ii). (2b)
 - (b) Necht' nyní $n = 3$ a $T' = T_3 \cup \{p_1^1\}$, tj. předpokládáme navíc, že “1. holub sedí v 1. budce”. Převeďte T' do množinové reprezentace. (2b)
 - (c) Ukažte, že $T' \vdash_R \square$. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. (4b)
 - (d) Necht' $T^* = T' \setminus \{\psi_2\}$ je teorie nad \mathbb{P} . Je teorie T' konzervativní extenzí teorie T^* ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Necht' $T = \{(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg P(x) \vee Q(y, z)), (\exists y)(\forall x)\neg Q(x, y), (\exists x)P(x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q je unární resp. binární relační symbol.
- (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespílitelná. (3b)
 - (c) Necht' T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespílitelná. (2b)
 - (d) Je teorie T kompletní? Jaké jsou její (navzájem neekvivalentní) kompletní jednoduché extenze? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Necht' $T = \{\varphi\}$ je teorie jazyka $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol a axiom φ vyjadřuje “ $U(x)$ platí pro právě 10 prvků.”

- (a) Je teorie T ω -kategorická? Uveďte zdůvodnění. (1b)
- (b) Nalezněte dvě neekvivalentní kompletní jednoduché extenze teorie T nebo zdůvodněte, proč neexistují. (2b)
- (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)