

Zkouška VPL - písemná část

29. června 2022

1. Žili, byli dva bratři, Alex a Bob. Jeden z nich vždy lže, druhý vždy mluví pravdu. Chceme rezolucí ve VL ukázat, že když se Alexe zeptáme “Jak by na otázku ‘Kdo z vás je lhář?’ odpověděl tvůj bratr?”, dokážeme z Alexovy odpovědi určit, kdo z nich je lhář. (Lhářem myslíme toho, kdo vždy lže. Předpokládáme, že dalšího bratra nemají.)
 - (a) Nechtě prvovýroky a resp. b vyjadřují, že “Alex / Bob vždy mluví pravdu” a označme $\mathbb{P} = \{a, b\}$. Napište výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad \mathbb{P} ve tvaru ekvivalence vyjadřující (po řadě) následující znalosti. (2b)
 - (i) Jeden z nich vždy lže, druhý vždy mluví pravdu. (Ale nevíme, který je který.)
 - (ii) Alex říká, že by Bob odpověděl, že lhářem je Alex.
 - (iii) Alex říká, že by Bob odpověděl, že lhářem je Bob.
 - (b) Nechtě $T_1 = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ a $T_2 = \{\varphi_1, \varphi_3\}$, t.j. uvažujeme možné Alexovy odpovědi zvlášť. Převeďte $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ do CNF a napište teorie T_1, T_2 v množinové reprezentaci. (2b)
 - (c) Pomocí rezoluce z T_1 a zvlášť z T_2 ukažte (pro obě možné Alexovy odpovědi), kdo z bratrů je lhář. (3b)
 - (d) Jsou teorie T_1, T_2 a teorie $T_3 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ nad \mathbb{P} kompletní? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Nechtě $T = \{(\exists x)P(x, x), (\forall x)(\exists y)R(x, y), (\forall u)(\forall v)(\exists x)(\forall y)(R(x, y) \rightarrow \neg P(u, v))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou binární relační symboly.
 - (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. (2b)
 - (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nespílitelná. (4b)
 - (c) Nechtě T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T' . Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'' , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b).* (2b)
 - (d) Je sentence $(\forall x)P(x, x)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T' ? Zdůvodněte všechny tři odpovědi. (2b)
3. Bud' $T = \{(\forall x)(\exists y)f(y) = x, (\forall x)(\forall y)(f(x) = f(y) \rightarrow x = y)\}$ teorie v jazyce $L = \langle f \rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.
 - (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu g takovou, že $T' \models f(g(x)) = x$. (2b)
 - (b) Napište formuli $\varphi(x, y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x, y) \leftrightarrow g(g(x)) = y$. (1b)
 - (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)