

## Zkouška VPL - písemná část

14. ledna 2022

1. Nechť  $T = \{p \vee s, q \leftrightarrow r, p \rightarrow (\neg q \wedge r)\}$  je teorie nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$ .
  - (a) Axiomatizujte  $M^{\mathbb{P}}(T)$  výrokem v CNF a zapište  $T$  v množinové reprezentaci. (2b)
  - (b) Pomocí implikačního grafu ukažte, že  $T$  je splnitelná. (2b)
  - (c) Rezolucí dokažte, že  $T \models \neg p \wedge s$ . (3b)
  - (d) Zjistěte, kolik je navzájem  $T$ -neekvivalentních výroků nad  $\mathbb{P}$ , které jsou nezávislé v  $T$ . Uveďte dva příklady takových výroků (pokud existují). (2b)
2. Uvažme následující tvrzení:
  - (i) Existuje student, který pokud složí zkoušku z logiky, tak zkoušku z logiky složí všichni studenti.
  - (ii) Existuje student, který pokud složí zkoušku z logiky, tak všichni studenti vystudují matfyz.
  - (a) Formalizujte tvrzení (i), (ii) po řadě jako sentence  $\varphi, \psi$  v jazyce  $L = \langle Z, M \rangle$  bez rovnosti, kde  $Z, M$  jsou unární relační symboly a  $Z(x), M(x)$  značí, že “student  $x$  složí zkoušku z logiky”, resp. “student  $x$  vystuduje matfyz”. Poté formule  $\varphi, \psi$  převedte do prenexního tvaru. (2b)
  - (b) Tablo metodou rozhodněte, které z formulí  $\varphi, \psi$  jsou logicky pravdivé. Jako zdůvodnění uveďte příslušná dokončená tabla. (4b)
  - (c) Zvolte libovolnou bezespornou větev  $V$  v jednom z tabel z (b) a sestrojte kanonický model  $\mathcal{A}$  z větve  $V$ . (2b)
  - (d) Je teorie  $\{\psi\}$  v jazyce  $L$  konzervativní extenzí teorie  $\{\varphi\}$  v jazyce  $L' = \langle Z \rangle$ ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť  $T$  je teorie v jazyce  $L = \langle 0, -, \text{abs}, <, f, g \rangle$  s rovností, kde  $0$  je konstantní symbol,  $\text{abs}, f, g$  jsou unární funkční symboly,  $-$  je binární funkční a  $<$  je binární relační symbol, s axiomy
$$\varphi_1 : (\forall u)(\forall \varepsilon)(0 < \varepsilon \rightarrow (\exists \delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(\text{abs}(x - u) < \delta \rightarrow \text{abs}(f(x) - f(u)) < \varepsilon))),$$
$$\varphi_2 : (\exists u)(\exists \varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall \delta)(0 < \delta \rightarrow (\exists x)(\text{abs}(x - u) < \delta \wedge \neg(\text{abs}(g(x) - g(u)) < \varepsilon))).$$
  - (a) Nalezněte formule  $\varphi'_1, \varphi'_2$  v prenexním tvaru, které jsou ekvivalentní s  $\varphi_1$  resp.  $\varphi_2$ . (1b)
  - (b) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii  $T'$  (případně v širším jazyce  $L'$ ) ekvivalentní s  $T$ . (2b)
  - (c) Buď  $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, -, \text{abs}, <, \text{id}, \text{sgn} \rangle$ , kde  $0, -, <$  má svůj obvyklý význam na  $\mathbb{R}$ ,  $\text{abs}(r) = |r|$  a  $\text{id}(r) = r$  pro všechna  $r \in \mathbb{R}$  a  $\text{sgn}(0) = 0$ ,  $\text{sgn}(r) = |r|/r$  pro  $r \neq 0$ . Nalezněte expanzi  $\mathcal{A}'$  struktury  $\mathcal{A}$  do jazyka  $L'$  takovou, že  $\mathcal{A}' \models T'$ . (2b)