

## Zkouška VPL - písemná část

18. ledna 2022

1. Adam, Barbora a Cyril jsou vyslýcháni, při jejich výslechu bylo zjištěno následující:
  - (i) Alespoň jeden z vyslýchanych říká pravdu a alespoň jeden lže.
  - (ii) Adam říká: “Barbora nebo Cyril lžou”
  - (iii) Barbora říká: “Cyril lže”
  - (iv) Cyril říká: “Adam nebo Barbora lžou”
  - (a) Zapište tvrzení (i) až (iv) jako výroky  $\varphi_1$  až  $\varphi_4$  nad množinou prvovýroků  $\mathbb{P} = \{a, b, c\}$ , přičemž  $a, b, c$  znamená (po řadě), že “Adam/Barbora/Cyril říká pravdu”. (2b)
  - (b) Označme  $T = \{\varphi_1, \dots, \varphi_4\}$ . Axiomatizujte  $M(T)$  jako formuli v CNF a jako formuli v DNF. (2b)
  - (c) Je teorie  $T$  ekvivalentní s teorií  $T' = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ ? Zdůvodněte. (2b)
  - (d) Pomocí tablo metody dokažte, že z teorie  $T$  plyne, že Adam říká pravdu. (3b)
  - (e) Kolik je neekvivalentních formulí  $\psi$  pravdivých v teorii  $T$  a zároveň nepravdivých v teorii  $S = \{\varphi_3\}$ ? Zdůvodněte. (2b)
2. Nechť  $T = \{(\forall x)\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)), (\forall x)(\neg R(x) \vee P(x)), \neg(\forall x)(R(x) \rightarrow \neg S(x)), (\forall x)(S(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$  je teorie jazyka  $L = \langle P, Q, R, S \rangle$  bez rovností, kde  $P, Q, R, S$  jsou unární relační symboly.
  - (a) Nalezněte k  $T$  ekvivalentní teorii  $T'$  (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze otevřenými formullemi. Zapište  $T'$  v množinové reprezentaci. (2b)
  - (b) Pomocí rezoluce dokažte, že  $T'$  je nesplnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem a uveďte použité unifikace. (3b)
  - (c) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů teorie  $T'$ , která je nesplnitelná. (2b)
  - (d) Má teorie  $T$  konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť  $T_n = \{c_i \neq c_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$  označuje teorii jazyka  $L_n = \langle c_1, \dots, c_n \rangle$  s rovnostmi, kde  $c_1, \dots, c_n$  jsou konstantní symboly.
  - (a) Pro dané konečné  $n \geq 1$  určete počet modelů konečné velikosti  $k$  teorie  $T_n$  až na izomorfismus. Určete počet spočetných modelů teorie  $T_n$ . (2b)
  - (b) Pro jaké dvojice hodnot  $n$  a  $m$  je  $T_n$  extenzí  $T_m$ ? Pro jaké je konzervativní extenzí? Zdůvodněte. (2b)