Zkouška VPL - písemná část

20. ledna 2022

1. Nechť $T = \{p \to \neg q \wedge r, q \vee r, (q \wedge s) \leftrightarrow r\}$ je teorie nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.
   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $T(q \to p)$ v kořeni. *(3b)*
   (b) Je formule $q \to p$ pravdivá v teorii T? Je lživá? Je nezávislá? Zdůvodněte. *(2b)*
   (c) Axiomatizujte $M(T)$ formulí v CNF. *(2b)*
   (d) Určete, kolik je navzájem neekvivalentních teorií S nad $\mathbb{P}' = \{r, s\}$ takových, že T je konzervativní extenzí S. Kolik z nich je kompletních? *(2b)*

2. Víme, že:
   (i) Adam má rád všechna jídla.
   (ii) Cokoliv, co někdo sní a přežije, je jídlo.
   (iii) Eva snědla jablko a přežila.
   (iv) Adam jí všechno, co jí Eva.

   Chceme rezolucí ukázat, že

   (v) Adam má rád jablka.

   Konkrétně:

   (a) Zapište tvrzení (i)–(v) pomocí sentencí $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ v jazyce $L = \langle R, S, J, Z, b, a, e\rangle$ bez rovnosti, kde $R(x, y)$ a $S(x, y)$ jsou binární relace, které vyjadřují, že "x má rád y" resp. "x snědl y", $J(x)$ a $Z(x)$ jsou unární relace vyjadřující, že "x je jídlo" resp. "x žije" a symboly b, a a e jsou konstantní symboly označující po řadě jablko, Adama a Evu. *(2b)*
   (b) Označme $T = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_4\}$. Pomocí skolemizace formulí $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ případně jejich negací vytvořte otevřenou teorii S, která je sporná, právě tehdy, když $T \models \varphi_5$. Zapište S v množinové reprezentaci. *(2b)*
   (c) Pomocí rezoluce ukažte, že S je sporná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. Uveďte použité unifikace. *(3b)*
   (d) Najděte konjunkci základních instancí axiomů teorie S, která je nesplnitelná. *(2b)*
   (e) Je $S \vdash_{LI} \square$? Zdůvodněte. *(2b)*

3. Nechť $T = \{U(x) \to U(f(x)), (\exists x)U(x), \neg(f(x) = x), \varphi\}$ je teorie v jazyce $L = \langle U, f\rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol, f je unární funkční symbol a φ vyjadřuje, že "existují maximálně 4 prvky".
   (a) Je teorie T extenzí teorie $S = \{(\exists x)(\exists y)(\neg x = y \wedge U(x) \wedge U(y)), \varphi\}$ v jazyce $L' = \langle U\rangle$? Je konzervativní extenzí? Zdůvodněte. *(2b)*
   (b) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte. *(2b)*