

Zkouška VPL - písemná část

26. ledna 2022

1. Nechť $T = \{(r \rightarrow p) \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow p, \neg(r \wedge q), r \rightarrow \neg s\}$ je teorie v jazyce $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.
 - (a) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v CNF a zapište jej v množinové reprezentaci. (2b)
 - (b) Dokažte rezoluční metodou, že $T \models q \rightarrow \neg s$ (2b)
 - (c) Určete množinu $M^{\mathbb{P}}(T)$ (1b)
 - (d) Je teorie T konzervativní extenzí nějaké teorie nad $\{p, q, r\}$? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (e) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních bezesporných extenzí teorie T nad $\{p, q, r, s, t\}$. Uveďte zdůvodnění. (2b)

2. Uvažte následující tvrzení:

- (i) Nula je malé číslo.
- (ii) Číslo je malé, právě když je blízko nuly.
- (iii) Součet dvou malých čísel je malé číslo.
- (iv) Je-li x blízko y , potom $f(x)$ je blízko $f(y)$.

Chceme dokázat, že platí:

- (v) Jsou-li x a y malá čísla, potom $f(x + y)$ je blízko $f(0)$.

Konkrétně:

- (a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle M, B, f, +, 0 \rangle$ s rovnostmi, kde M je unární relační symbol ($M(x)$ značí, že “ x je malé”), B je binární relační symbol ($B(x, y)$ značí, že “ x je blízko y ”), f je unární funkční symbol, $+$ je binární funkční symbol (označující součet) a 0 je konstantní symbol. (2b)
 - (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. (Nápověda: *Axiomy rovnosti nejsou v tablu nezbytné.*) (4b)
 - (c) Rozhodněte, zda platí $T \models \varphi_5$ a zda platí $T \models M(f(0))$. Zdůvodněte. (2b)
 - (d) Pokud existují, uveďte alespoň dvě kompletní jednoduché extenze teorie T . Zdůvodněte. (2b)
3. Buď $T = \{x \leq x, x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z, x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y, (\exists y)(\forall x) x \leq y, \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle \leq \rangle$ s rovnostmi, kde \leq je binární relační symbol a φ je sentence vyjadřující “*Existuje právě 5 prvků.*”.
- (a) Označme jako ψ formuli $x \leq z \wedge y \leq z \wedge (\forall w)(x \leq w \wedge y \leq w \rightarrow z \leq w)$. Je teorie $T' = T \cup \{f(x, y) = z \leftrightarrow \psi\}$ extenzí teorie T o definici funkčního symbolu f ? Zdůvodněte. (3b)
 - (b) Má teorie T méně/stejně/více navzájem neizomorfních modelů než teorie T' ? Zdůvodněte. (2b)