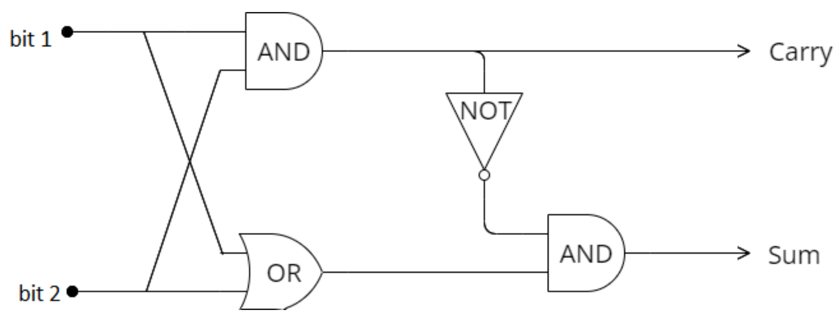
Zkouška VPL - písemná část

28. ledna 2022

1. *Half-adder circuit* je logický obvod se dvěma vstupními bity (bit 1, bit 2) a dvěma výstupními bity (carry, sum) znázorněný v následujícím diagramu:



   (a) Formalizujte tento obvod ve výrokové logice. Konktrétně, vyjádřete jej jako výrokovou teorii $T = \{c \leftrightarrow \varphi,\ s \leftrightarrow \psi\}$ v jazyce $\mathbb{P} = \{b_1, b_2, c, s\}$, kde výrokové proměnné znamenají po řadě "bit 1", "bit 2", "carry" a "sum", a formule φ, ψ neobsahují proměnné c, s. *(2b)*

   (b) Axiomatizujte množinu $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v CNF a také výrokem v DNF *(2b)*

   (c) Dokažte rezoluční metodou, že $T \models c \rightarrow \neg s$ *(2b)*

   (d) Buď $\mathbb{P}' = \{b_1, b_2, b_3, c, s\}$. Určete počet navzájem neekvivalentních teorií T' v jazyce $\mathbb{P}'$ takových, že T' je extenzí teorie T. Kolik z nich je kompletních? Zdůvodněte. *(2b)*

   (e) Reprezentujte booleovskou funkci ternárního sčítání modulo 2, tj. $f(b_1, b_2, b_3) = (b_1 + b_2 + b_3) \pmod 2$, pomocí výroku v jazyce $\{b_1, b_2, b_3\}$. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)P(x,x), (\exists x)(\forall y)(P(y,x) \rightarrow P(x,y)), (\forall x)(\neg(\forall y)(P(x,y) \vee P(y,x)) \rightarrow \neg P(x,x)), \neg(\exists x)(\forall y)P(x,y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol.

   (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nesplnitelná. *(3b)*

   (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T'. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'', která je nesplnitelná. *(2b)*

   (d) Je formule $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ pravdivá v teorii T? Je lživá? Je nezávislá? Zdůvodněte. *(2b)*

3. Buď $T = \{\neg(h(c) = c),\ (\forall x)(\forall y)(h(x) = h(y) \rightarrow x = y),\ \varphi\}$ teorie v jazyce $L = \langle h, c \rangle$ s rovností, kde h je unární funkční symbol, c je konstantní symbol, a axiom φ vyjadřuje *"Existují nejvýše* 4 *prvky."*

   (a) Určete, kolik má teorie T navzájem neekvivalentních jednoduchých kompletních extenzí. Napište dvě z nich a zdůvodněte, že jsou neekvivalentní. *(3b)*

   (b) Je teorie $S = \{\neg\,(\exists x)(h(x) = x),\ (\forall x)(\exists y)(h(y) = x),\ \varphi\}$ (v tomtéž jazyce L) extenzí teorie T? Je T extenzí S? A pokud ano, jde o konzervativní extenzi/extenze? Odpovědi zdůvodněte. *(2b)*