Zkouška VPL - písemná část

3. února 2022

1. Nechť $T = \{p,\ \neg q \to \neg r,\ \neg q \to \neg s,\ r \to p,\ \neg s \to \neg p\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r, s\}$.
   (a) Pomocí implikačního grafu ukažte, že T je splnitelná. *(2b)*
   (b) Určete všechny modely teorie T a axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Rezolucí dokažte, že $T \models p \leftrightarrow q$. *(3b)*
   (d) Zjistěte a zdůvodněte, kolik je navzájem
      (i) neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v T,
      (ii) T-neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v T. *(2b)*

2. Uvažte následující tvrzení:
   (i) Každý docent napsal alespoň jednu učebnici.
   (ii) Každou učebnici napsal nějaký docent.
   (iii) U každého docenta někdo studuje.
   (iv) Každý, kdo studuje u nějakého docenta, přečetl všechny učebnice od tohoto docenta.
   (v) Každou učebnici někdo přečetl.

   (a) Formalizujte tvrzení (i)–(v) po řadě jako sentence $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ v predikátové logice v jazyce $L = \langle N, S, P, D, U \rangle$ bez rovnosti, kde N, S, P jsou binární relační symboly ($N(x, y)$ znamená "x napsal y", $S(x, y)$ znamená "x studuje u y", $P(x, y)$ znamená "x přečetl y") a D, U jsou unární relační symboly ("být docentem", "být učebnicí"). *(2b)*
   (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ s položkou $F\varphi_5$ v kořeni. *(3b)*
   (c) Je sentence φ_5 pravdivá v teorii T? Je lživá v T? Je nezávislá v T? Zdůvodněte. *(1b)*
   (d) Má teorie T kompletní konzervativní extenzi? Zdůvodněte. *(2b)*
   (e) Uvažme teorii $T' = T \cup \{D(x), S(x, y), P(x, y)\}$. Kolik má teorie T' dvouprvkových modelů (až na izomorfismus)? Zdůvodněte. *(2b)*

3. Nechť T je teorie jazyka $L = \langle f, g, a \rangle$ s rovností, kde f je binární funkční symbol, g je unární funkční symbol, a je konstantní symbol, s následujícími axiomy

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z),$$
$$f(a, x) = x \quad \wedge \quad f(x, a) = x,$$
$$f(x, g(x)) = a \quad \wedge \quad f(g(x), x) = a.$$

   (a) Uvažme strukturu $\underline{\mathbb{Z}_4} = \langle \{0, 1, 2, 3\}, +, -, 0 \rangle$ jazyka L, kde $+, -$ jsou standardní sčítání a (unární) mínus modulo 4. Je teorie $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{Z}_4})$, tj. teorie struktury $\underline{\mathbb{Z}_4}$, jednoduchá extenze teorie T? Zdůvodněte. *(2b)*
   (b) Nalezněte všechny podstruktury $\underline{\mathbb{Z}_4}$. Jsou všechny modelem teorie T? Zdůvodněte. *(2b)*
   (c) Nechť $\underline{\mathbb{Q}} = \langle \mathbb{Q}, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ je struktura racionálních čísel se standardními operacemi. Existuje redukt $\underline{\mathbb{Q}}$, který je modelem T? Zdůvodněte. *(1b)*