Zkouška VPL - písemná část

7. února 2022

1. Uvažme barvení přirozených čísel (včetně nuly) podle následujících pravidel:

   (i) *Každé číslo má právě jednu barvu: červenou/zelenou/modrou.*

   (ii) *Každá dvě po sobě jdoucí čísla mají různou barvu.*

   (iii) *Každé číslo má jinou barvu než nejbližší vyšší prvočíslo.*

   Nechť prvovýroky r_i, g_i, b_i vyjadřují (po řadě), že "číslo i je červené/zelené/modré" a označme $\mathbb{P} = \{r_i, g_i, b_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

   (a) Napište množiny T_1, T_2, T_3 výroků nad $\mathbb{P}$ vyjadřující (po řadě) $(i), (ii), (iii)$. (Pozn: Zatímco ve výrocích nemůžeme mluvit o prvočíslech, v popisu množin ano, např. množina $\{r_i \mid i \text{ je prvočíslo}\}$ vyjadřuje, že "prvočísla jsou červená".) *(2b)*

   (b) Označme nyní $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup \{g_{10}, b_{11}\}$, t.j. přidáváme předpoklady, že "číslo $10, 11$ je zelené, resp. modré". Nalezněte <u>konečnou</u> část $T' \subseteq T$ takovou, že $T' \models g_8$. *(2b)*

   (c) Převodem axiomů T' na CNF a pomocí výroku g_8 napište teorii S v množinové reprezentaci, která je nesplnitelná, právě když $T' \models g_8$. *(2b)*

   (d) Rezolucí dokažte, že S je nesplnitelná. Zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(3b)*

   (e) Pro která prvočísla i, j platí $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \models r_i \to r_j$? Odpověď zdůvodněte. *(2b)*

2. Nechť $T = \{\neg(\exists x)\neg(\exists y)P(x, y),\ (\forall x)\neg(\forall y)P(x, y)\}$ je teorie jazyka $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol.

   (a) Nalezněte teorii T', která má za axiomy pouze univerzální sentence a zároveň je konzervativní extenzí teorie T. *(2b)*

   (b) Označme φ sentenci $(\exists x)(\forall y)P(x, y)$. Sestrojte dokončená tabla z teorie T' pro položku $F\varphi$ resp. $T\varphi$ v kořeni. (Pokud nemáte T' z předchozího bodu, pracujte s teorií T.) *(3b)*

   (c) Z nějaké bezesporné větve v předchozích tablech sestrojte kanonický model. *(2b)*

   (d) Je φ dokazatelná, zamítnutelná, nebo nezávislá v teorii T'? A v teorii T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je extenze teorie $DeLO^+$ (tj. hustých lineárních uspořádání s maximálním prvkem a bez minimálního prvku) o nový axiom $a \leq b \wedge b < c$ v jazyce $L = \langle \leq, a, b, c \rangle$ s rovností, kde a, b, c jsou nové konstantní symboly.

   (a) Jsou sentence $(\forall x)(a \leq x)$ a $(\forall x)(x \leq c)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (b) Napište dvě neekvivalentní jednoduché extenze teorie T, které jsou ω-kategorické. *(2b)*