Výroková a predikátová logika - VIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2013/2014

Dokončené tablo

Chceme, aby dokončená bezesporná větev poskytovala protipříklad.

Výskyt položky P ve vrcholu v tabla τ je *i-tý*, pokud v má v τ právě $i-1$ předků označených P a je *redukovaný* na větvi V skrze v, pokud

$a)$ P není tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$ a P se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k rozvoji P na V, nebo

$b)$ P je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$, má $(i+1)$-ní výskyt na V a zároveň se na V vyskytuje $T\varphi(x/t_i)$ resp. $F\varphi(x/t_i)$, kde t_i je i-tý konstantní term (jazyka L_C).

Nechť V je větev tabla τ z teorie T. Řekneme, že

- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo každý výskyt položky na V je redukovaný na V a navíc V obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

Systematické tablo - konstrukce

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

(1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R. V případě $(*)$ vezmi lib. $c \in L_C \setminus L$, v případě $(\sharp)$ za t vezmi term t_1. Dokud to lze, aplikuj následující kroky.

(2) Nechť v je nejlevější vrchol v co nejmenší úrovni již daného tabla τ_n obsahující výskyt položky P, který není redukovaný na nějaké bezesporné větvi skrze v. (Neexistuje-li v, vezmi $\tau'_n = \tau_n$ a jdi na (4).)

$(3a)$ Není-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze v. V případě $(*)$ za c vezmi c_i pro nejmenší možné i.

$(3b)$ Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ a ve v má i-tý výskyt, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze v, přičemž za t vezmi term t_i.

(4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n, vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z T pro R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup\tau_n$.

Systematické tablo - příklad

$$
\begin{array}{c}
T((\exists y)(\neg R(y,y) \vee P(y,y)) \wedge (\forall x)R(x,x)) \\
| \\
T(\exists y)(\neg R(y,y) \vee P(y,y)) \\
| \\
T(\forall x)R(x,x) \\
| \\
T(\neg R(c_0,c_0) \vee P(c_0,c_0)) \qquad c_0 \ \text{nová} \\
| \\
T(\forall x)R(x,x) \\
| \\
TR(c_0,c_0) \qquad (\text{za předpokladu } t_1 = c_0) \\
\diagup \qquad \diagdown
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
T(\neg R(c_0,c_0)) & TP(c_0,c_0) \\
| & | \\
T(\forall x)R(x,x) & T(\forall x)R(x,x) \\
| & | \\
TR(t_2,t_2) & TR(t_2,t_2) \\
| & | \\
FR(c_0,c_0) & T(\forall x)R(x,x) \\
| & | \\
\otimes & TR(t_3,t_3) \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení *Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ dokončené.*

Důkaz Nechť $\tau = \cup\tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni a nechť P je položka ve vrcholu v tabla τ.

- Do úrovně v (včetně) je v τ jen konečně mnoho výskytů všech položek.
- Kdyby výskyt P ve v byl neredukovaný na nějaké bezesporné větvi v τ, byl by vybrán v nějakém kroku (2) a zredukován v $(3a)$ či $(3b)$.
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. □

Tvrzení *Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.*

Důkaz Kdyby bylo τ nekonečné, dle Königova lemmatu by obsahovalo nekonečnou větev. Tato větev by byla bezesporná, neboť při konstrukci τ se sporné větve neprodlužují. Pak by ale τ nebylo sporné. □

Rovnost

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností jsou

(i) $x = x$

(ii) $x_1 = y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n = y_n \ \rightarrow \ f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$
pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L.

(iii) $x_1 = y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n = y_n \ \rightarrow \ (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$
pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně $=$.

Tablo důkaz z teorie T jazyka L *s rovností* je tablo důkaz z teorie T^*, kde T^* je rozšíření teorie T o axiomy rovnosti pro L *(resp. jejich generální uzávěry).*

Poznámka *V kontextu logického programování má rovnost často jiný význam než v matematice (identita). Např. v Prologu $t_1 = t_2$ znamená, že t_1 a t_2 jsou unifikovatelné.*

Kongruence a faktorstruktura

Nechť $\sim$ je ekvivalence na A, $f : A^n \to A$ a $R \subseteq A^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sim$ je

- *kongruence pro funkci* f, pokud pro každé $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ platí
$$x_1 \sim y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n \sim y_n \quad \Rightarrow \quad f(x_1, \ldots, x_n) \sim f(y_1, \ldots, y_n),$$
- *kongruence pro relaci* R, pokud pro každé $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in A$ platí
$$x_1 \sim y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n \sim y_n \quad \Rightarrow \quad (R(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n)).$$

Nechť ekvivalence $\sim$ na A je kongruence pro každou funkci i relaci struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ pro jazyk $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. *Faktorstruktura* (*podílová struktura*) struktury $\mathcal{A}$ dle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/\sim \, = \langle A/\sim, \mathcal{F}^{A/\sim}, \mathcal{R}^{A/\sim} \rangle$, kde

$$f^{A/\sim}([x_1]_\sim, \ldots, [x_n]_\sim) = [f^A(x_1, \ldots, x_n)]_\sim$$
$$R^{A/\sim}([x_1]_\sim, \ldots, [x_n]_\sim) \Leftrightarrow R^A(x_1, \ldots, x_n)$$

pro každé $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ a $x_1, \ldots, x_n \in A$, tj. funkce a relace jsou definované z $\mathcal{A}$ pomocí reprezentantů.

Např. $\underline{\mathbb{Z}}_p$ je faktorstruktura $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ dle kongruence modulo p.

Význam axiomů rovnosti

Nechť $\mathcal{A}$ je struktura pro jazyk L, ve které je rovnost interpretovaná jako relace $=^A$ splňující axiomy rovnosti, tj. ne nutně identita.

1) Z axiomů (i) a (iii) plyne, že relace $=^A$ je ekvivalence na A.
2) Axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že relace $=^A$ je kongruence pro každou funkci a relaci v $\mathcal{A}$.
3) Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, je i $(\mathcal{A}/{=^A}) \models T^*$, kde $\mathcal{A}/{=^A}$ je faktorstruktura struktury $\mathcal{A}$ dle $=^A$, přičemž rovnost je v $\mathcal{A}/{=^A}$ interpretovaná jako identita.

Na druhou stranu, v každém modelu, v kterém je rovnost interpretovaná jako identita, všechny axiomy rovnosti evidentně platí.

Korektnost

Řekneme, že struktura $\mathcal{A}$ se *shoduje s položkou* P, pokud P je $T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo pokud P je $F\varphi$ a $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Navíc, $\mathcal{A}$ se *shoduje s větví* V, shoduje-li se s každou položkou na V.

Lemma *Nechť $\mathcal{A}$ je model teorie T jazyka L, který se shoduje s položkou R v kořeni tabla $\tau = \cup\tau_n$ z T. Pak $\mathcal{A}$ lze expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví V v tablu τ.*

Poznámka *Postačí nám expanze modelu $\mathcal{A}$ o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ vyskytující se na větvi V, ostatní konstanty lze dodefinovat libovolně.*

Důkaz Indukcí dle n nalezneme větev V_n v tablu τ_n a expanzi $\mathcal{A}_n$ modelu $\mathcal{A}$ o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ na V_n tak, že $\mathcal{A}_n$ se shoduje s V_n a $V_{n-1} \subseteq V_n$.

Předpokládejme, že máme větev V_n v τ_n a expanzi $\mathcal{A}_n$ shodující se s V_n.

- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n bez prodloužení V_n, položme $V_{n+1} = V_n$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, nechť V_{n+1} je tato větev a $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi$, shoduje se $\mathcal{A}_{n+1}$ s V_{n+1}.

Korektnost - důkaz (pokr.)

- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n. Z indukčního předpokladu víme, že $\mathcal{A}_n$ se shoduje s P.

(i) V případě atomického tabla pro spojku položme $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ a snadno ověříme, že V_n lze prodloužit na větev V_{n+1} shodující se s $\mathcal{A}_{n+1}$.

(ii) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$, nechť V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1}, tj. o položku $T\varphi(x/t)$. Nechť $\mathcal{A}_{n+1}$ je libovolná expanze $\mathcal{A}_n$ o nové konstanty z termu t. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\forall x)\varphi(x)$, platí $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/t)$. Obdobně pro P tvaru $F(\exists x)\varphi(x)$.

(iii) Je-li P tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$, nechť V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1}, tj. o položku $T\varphi(x/c)$. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\exists x)\varphi(x)$, pro nějaké $a \in A$ platí $\mathcal{A}_n \models \varphi(x)[e(x/a)]$ pro každé ohodnocení e. Nechť $\mathcal{A}_{n+1}$ je expanze $\mathcal{A}_n$ o novou konstantu $c^A = a$. Pak $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/c)$. Obdobně pro P tvaru $F(\forall x)\varphi(x)$.

Základní krok pro $n = 0$ plyne z obdobné analýzy atomických tabel pro položku R v kořeni s využitím předpokladu, že model $\mathcal{A}$ se shoduje s R. $\square$

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda v predikátové logice je korektní.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ tablo dokazatelná z T, je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Nechť φ je tablo dokazatelná z teorie T, tj. existuje sporné tablo τ z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T, tj. existuje model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí (protipříklad).
- Jelikož se $\mathcal{A}$ shoduje s položkou $F\varphi$, dle předchozího lemmatu lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu τ.
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi$, $F\psi$ pro nějakou sentenci ψ. $\square$

Kanonický model

Z bezesporné větve V dokončeného tabla vyrobíme model, který se shoduje s V. Vyjdeme z dostupných syntaktických objektů - konstantních termů.

Nechť V je bezesporná větev dokončeného tabla z teorie T jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. *Kanonický model* z větve V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$, kde

(1) A je množina všech konstantních termů jazyka L_C,

(2) $f^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$
pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F} \cup (L_C \setminus L)$ a $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in A$.

(3) $R^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) \Leftrightarrow TR(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ je položka na V
pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ či rovnost a $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in A$.

Poznámka *Výraz $f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ na pravé straně v (2) je konstantní term jazyka L_C, tedy prvek z A. Neformálně, pro zdůraznění, že jde o syntaktický objekt*

$$f^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = \text{“}f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})\text{”}$$

Kanonický model - příklad

Nechť teorie $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ je jazyka $L = \langle R, f, d\rangle$. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T obsahuje jedinou větev V a ta je bezesporná.

Kanonický model $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V je pro jazyk L_C a platí

$$A = \{d, f(d), f(f(d)), \ldots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \ldots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \ldots\},$$

$$d^A = d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^A(d) = \text{“}f(d)\text{”}, \;\; f^A(f(d)) = \text{“}f(f(d))\text{”}, \;\; f^A(f(f(d))) = \text{“}f(f(f(d)))\text{”}, \;\ldots$$

$$R^A = \{d, f(d), f(f(d)), \ldots, f(c_0), f(f(c_0)), \ldots, f(c_1), f(f(c_1)), \ldots\}.$$

Redukt $\mathcal{A}$ na jazyk L je $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A\rangle$.

Kanonický model s rovností

Je-li jazyk L s rovností, T^* označuje rozšíření T o axiomy rovnosti pro L.

Požadujeme-li, aby rovnost byla interpretovaná jako identita, kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné větve V dokončeného tabla z T^* musíme faktorizovat dle $=^A$.

Dle definice (3), v modelu $\mathcal{A}$ z V pro relaci $=^A$ platí, že pro každé $t_{i_1}, t_{i_2} \in A$,

$$t_{i_1} =^A t_{i_2} \quad \Leftrightarrow \quad T(t_{i_1} = t_{i_2}) \text{ je položka na } V.$$

Jelikož V je dokončená a obsahuje axiomy rovnosti, relace $=^A$ je ekvivalence na A a navíc kongruence pro všechny funkce a relace v $\mathcal{A}$.

Kanonický model s rovností z větve V je faktorstruktura $\mathcal{A}/{=^A}$.

Pozorování *Pro každou formuli φ,*

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{A}/{=^A}) \models \varphi,$$

přičemž v $\mathcal{A}$ je $=$ interpretovaná relací $=^A$, zatímco v $\mathcal{A}/{=^A}$ jako identita.

Poznámka *Zatímco $\mathcal{A}$ je spočetný model, $\mathcal{A}/{=^A}$ může být konečný.*

Kanonický model s rovností - příklad

Nechť $T = \{(\forall x)R(f(x)),\ (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ je nad $L = \langle R, f, d\rangle$ s rovností. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T^* obsahuje bezespornou větev V.

V kanonickém modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V pro relaci $=^A$ platí

$$s =^A t \quad \Leftrightarrow \quad t = f(\cdots(f(s)\cdots) \text{ nebo } s = f(\cdots(f(t)\cdots),$$

kde f je aplikováno $2i$-krát pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

Kanonický model s rovností z V je $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/=^A) = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B, c_i^B\rangle_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
(A/=^A) &= \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \dots\},\\
d^B &= [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N},\\
f^B([d]_{=^A}) &= [f(d)]_{=^A},\ f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A}, \quad \dots\\
R^B &= (A/=^A).
\end{aligned}$$

Redukt $\mathcal{B}$ na jazyk L je $\mathcal{B}' = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B\rangle$.

Úplnost

Lemma *Kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné dok. větve V se shoduje s V.*

Důkaz Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na V.

- Pro φ atomickou, je-li $T\varphi$ na V, je $\mathcal{A} \models \varphi$ dle (3). Je-li $F\varphi$ na V, není $T\varphi$ na V, neboť V je bezesporná, a tedy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ dle (3).
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $T\varphi$ a $T\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\psi$, tedy $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li $T(\forall x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/t)$ na V pro každé $t \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ pro každé $t \in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\exists x)\varphi(x)$ na V.
- Je-li $T(\exists x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/c)$ na V pro nějaké $c \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tedy $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\forall x)\varphi(x)$ na V. $\square$

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je úplná.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ pravdivá v T, je φ tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \varphi$.*

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokončené tablo (např. systematické) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je sporné.

- Kdyby ne, v tablu τ je nějaká bezesporná větev V.
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura $\mathcal{A}$ pro jazyk L_C shodující se s větví V, speciálně s položkou $F\varphi$ v kořeni, tj. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.
- Nechť $\mathcal{A}'$ je redukt struktury $\mathcal{A}$ na původní jazyk L. Platí $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy $\mathcal{A}'$ je modelem T (neboť $\mathcal{A}'$ se shoduje s $T\psi$ pro každé $\psi \in T$).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je důkazem φ z T. $\square$