

## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 1

8. října 2013

1. Opakování základních pojmů z přednášky na konkrétních příkladech podle potřeby.
  - (a) Ukažte, že v každém stromě  $T$  (dle definice z přednášky) pro každé prvky  $x, y$  s  $x <_T y$  mezi  $x$  a  $y$  existuje bezprostřední následník  $x$  (syn).
  - (b) Nalezněte příklad stromu, ve kterém nějaký prvek (mimo kořene) nemá bezprostředního předka (otce).
  - (c) Ukažte, že každý konečně větvcí se strom, ve kterém má každý prvek (mimo kořene) otce, je nejvýše spočetný.
2. Mějme konečnou hru dvou (střídajících se) hráčů. Hra končí po  $n$  kolech výhrou jednoho z hráčů označených  $X, Y$ , přičemž  $X$  začíná. Hra je zadaná formulí  $\varphi(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$  vyjadřující, že ve hře s tahy  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$  vyhrává  $X$ . Pomocí kvantifikátorů sestrojte formuli vyjadřující
  - (a) “ $X$  nemůže prohrát”, “ $Y$  nemůže prohrát”,
  - (b) “ $X$  má vyhrávací strategii”,
  - (c) “ $Y$  má vyhrávací strategii”.
3. Je dán (neorientovaný) graf  $G$  a dva jeho vrcholy  $u, v$ . Sestrojte výrokovou formuli, která je splnitelná, právě když
  - (a)  $G$  je bipartitní,
  - (b)  $G$  má perfektní párování,
  - (c) v  $G$  existuje cesta mezi  $u$  a  $v$ .
4. Sestrojte formule 1. řádu (v jazyce teorie grafů) vyjadřující
  - (a) “ $u$  a  $v$  mají alespoň jednoho společného souseda”,
  - (b) “existují tři nezávislé hrany”,
  - (c) “existuje cesta mezi  $u$  a  $v$  délky  $n$ ”, kde  $n > 0$  je předem dané.
5. Sestrojte formule 2. řádu (v jazyce teorie grafů) vyjadřující
  - (a) “existuje bipartitní rozklad”,
  - (b) “existuje perfektní párování”,
  - (c) “existuje cesta mezi  $u$  a  $v$ ”.
6. Sestrojte formule 1. řádu (s relačním symbolem  $\leq$ ) vyjadřující
  - (a) “ $x$  je nejmenší prvek”, “ $x$  je minimální prvek”,
  - (b) “ $x$  má bezprostředního následníka”,
  - (c) “každé dva prvky mají nejmenšího společného předchůdce”.
7. Pomocí rovnosti nalezněte formule 1.řádu vyjadřující pro předem dané  $n > 0$ 
  - (a) “existuje alespoň  $n$  prvků”,
  - (b) “existuje nejvýše  $n$  prvků”,
  - (c) “existuje právě  $n$  prvků”

Lze pomocí jedné či vícero formulí vyjádřit “existuje nekonečně mnoho prvků”?
8. Sestrojte formuli 2. řádu vyjadřující “existuje konečně mnoho prvků”. Návod:
  - (a) Sestrojte formule 1. řádu (s funkčním symbolem  $f$ ) vyjadřující “ $f$  je prostá”, “ $f$  je na”.
  - (b) Sestrojte formuli 2. řádu vyjadřující “každá funkce, která je na, je prostá”.