Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 10

10. prosince 2013

1. Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že
   (a) $T^* \models x = y \ \rightarrow\ y = x$ (symetrie $=$)
   (b) $T^* \models (x = y\ \wedge\ y = z)\ \rightarrow\ x = z$ (tranzitivita $=$)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (*iii*) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$, pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

2. Dokažte větu o konstantách syntakticky pomocí transformací tabel.

   Věta 1. *Nechť φ je formule jazyka L ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T nad L'. Pak*

   $$T \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n).$$

3. Dokažte větu o dedukci pomocí transformací tabel.

   Věta 2. *Pro každou teorii T (v uzavřeném tvaru) a sentence φ, ψ,*

   $$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \textit{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

4. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v A existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

   $$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

   (Tento příklad ukazuje, že pojem dobrého uspořádání *není definovatelný v jazyce 1. řádu.)*

5. Ověřte platnost pravidel pro vytýkání kvantifikátorů.

6. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.
   (a) $(\forall y)((\exists x)P(x, y) \rightarrow Q(y, z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x, y) \vee Q(x, y))$
   (b) $(\exists x)R(x, y) \leftrightarrow (\forall y)P(x, y)$
   (c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\exists x)(\exists y)R(x, y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x, y)$

7. K předchozím formulím nalezněte Skolemovy varianty.

8. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte
   (a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
   (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$

9. Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů

   $$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
   $$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y\ \wedge\ \neg(x = y)$$

   Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.
   (a) $x + (-x) = 0$
   (b) $x + (-y) < x$

(c) $-(x+y) < -x$

10. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1\rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:

$$x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \rightarrow \ y = z.$

(a) Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.

(b) Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$?

(c) Lze každý model teorie T *jednoznačně* expandovat na model teorie T'?

11. Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.

(a) Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x, y)$ a proměnnou y?

(b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ.

(c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechozího příkladu?

(d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L.

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

12. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.

(a) $L = \langle P, Q, f, a, b\rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.

(b) $L = \langle P, f, g, a\rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.

13. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejsplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konstantní symboly a, b.

(a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$

(b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$

(c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$

(d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

14. Nechť otevřená teorie P je v množinové reprezentaci, tj. je to množina klauzulí. Řekneme, že P je *program*, obsahuje-li každá její klauzule právě jeden pozitivní literál (tj. atomickou formuli) a libovolně (konečně) mnoho negativních literálů.

(a) Dokažte, že každý program má Herbrandův model.

(b) Dokažte, že každý program má *minimální* Herbrandův model, tj. Herbrandův model $\mathcal{A}$ takový, že pro každý Herbrandův model $\mathcal{B}$ je $R^A \subseteq R^B$ pro každý relační symbol R. *(Návod: ukažte, že* "průnik" *všech Herbrandových modelů je Herbrandův model.)*

(c) Nechť $\mathcal{A}$ je minimální Herbrandův model programu P. Dokažte, že pro každou atomickou formuli φ,

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad P \models \varphi.$$

(d) Nechť P je program a $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ je konjunkce atomických formulí. Dokažte, že je-li $P \models (\exists x_1) \ldots (\exists x_n)\psi$, pak existují konstantní termy $t_1, \ldots, t_n$ takové, že $P \models \psi(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$.

Poznámka: Tento příklad ukazuje na možnost zesílit Herbrandovu větu pro teorie tvaru $P \cup \{\neg\psi\}$, kde P je program a ψ je konjunkce atomických formulí. Je-li ψ dotaz nad programem P (v Prologu), pak termy $t_1, \ldots, t_n$ (pokud existují) jsou "dosvědčující" výstupní substitucí, jíž interpret Prologu vyhledává.