Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 11

17. prosince 2013

1. Ukažte, že Skolemova varianta nemusí být ekvivalentní původní formuli, např. ověřte
   (a) $\models (\forall x)P(x, f(x)) \rightarrow (\forall x)(\exists y)P(x, y)$
   (b) $\not\models (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)P(x, f(x))$
2. Nechť T' je rozšíření teorie $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ jazyka $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností o definice $<$ a unárního $-$ pomocí axiomů
$$\begin{aligned} -x = y \quad &\leftrightarrow \quad x + y = 0 \\ x < y \quad &\leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y) \end{aligned}$$
   Nalezněte formule původního jazyka L ekvivalentní v T' následujícím formulím.
   (a) $x + (-x) = 0$
   (b) $x + (-y) < x$
   (c) $-(x + y) < -x$
3. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:
$$x \neq 0 \ \rightarrow \ (\exists y)(x \cdot y = 1).$$
   Víme, že $T \models 0 \cdot y = 0$ a $T \models \ (x \neq 0 \ \wedge \ x \cdot y = 1 \ \wedge \ x \cdot z = 1) \ \rightarrow \ y = z.$
   (a) Nalezněte Skolemovu variantu φ_S formule φ s novým funkčním symbolem f.
   (b) Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$?
   (c) Lze každý model teorie T *jednoznačně* expandovat na model teorie T'?
4. Nechť T je předchozí teorie. Označme ψ formuli $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$.
   (a) Platí v T podmínky existence a jednoznačnosti pro formuli $\psi(x, y)$ a proměnnou y?
   (b) Sestrojte extenzi T^* teorie T o definovaný symbol f formulí ψ.
   (c) Je T^* ekvivalentní teorii T' z přechozího příkladu?
   (d) K následující formuli nalezněte v T^* ekvivalentní formuli původního jazyka L.
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$
5. Sestrojte Herbrandovo univerzum a příklad Herbrandovy struktury pro následující jazyky.
   (a) $L = \langle P, Q, f, a, b \rangle$, kde P, Q jsou unární resp. binární relační, f je unární funkční, a, b jsou konstantní symboly.
   (b) $L = \langle P, f, g, a \rangle$, kde P je binární relační, f, g jsou unární funkční, a je konstantní.
6. Sestrojte Herbrandův model pro následující teorie anebo nalezněte nejsplnitelnou konjunkci základních instancí jejích axiomů. Předpokládejte, že jazyk obsahuje konstantní symboly a, b.
   (a) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), \neg Q(x, b), P(a)\}$
   (b) $T = \{\neg P(x) \vee Q(f(x), y), Q(x, b), P(a)\}$
   (c) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x))\}$
   (d) $T = \{P(x, f(x)), \neg P(x, g(x)), P(g(x), f(y)) \rightarrow P(x, y)\}$

7. Převeďte následující formule na ekvisplnitelné formule v množinové reprezentaci.

   (a) $(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
   (b) $\neg(\forall y)(\exists x)P(x,y)$
   (c) $\neg(\exists x)((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$
   (d) $(\exists x)(\forall y)(\exists z)(P(x,z) \wedge P(z,y) \to R(x,y))$

8. Pomocí unifikačního algoritmu nalezněte nejobecnější unifikace následujících množin výrazů nebo ukažte, nejsou unifikovatelné.

   (a) $\{P(x, g(y), f(a)), P(f(y), g(f(z)), z)\}$
   (b) $\{P(x, f(x), g(y)), P(a, f(g(a)), g(a)), P(y, f(y), g(a))\}$
   (c) $\{P(x, f(x,y)), P(y, f(y,a)), P(b, f(b,a))\}$
   (d) $\{P(f(a), y, z), P(y, f(a), b), P(x, y, f(z))\}$

9. Řekneme, že výraz E_1 je *variantou* výrazu E_2, pokud existují substituce σ a τ takové, že $E_1 = E_2\sigma$ a $E_2 = E_1\tau$. Dokažte, že je-li E_1 variantou E_2, pak se liší jen přejmenováním proměnných.

10. Nalezněte (všechny) rezolventy následujících klauzulí.

    (a) $\{P(x,y), P(y,z)\}$, $\{\neg P(u, f(u))\}$
    (b) $\{P(x,x), \neg R(x, f(x))\}$, $\{R(x,y), Q(y,z)\}$
    (c) $\{P(x,y), \neg P(x,x), Q(x, f(x), z)\}$, $\{\neg Q(f(x), x, z), P(x,z)\}$

11. Ukažte, že následující množina klauzulí je rezolucí zamítnutelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého rezolučního kroku napište použitou substituci a označte rezolvované literály.

    (a) $\{P(a, x, f(y)), P(a, z, f(h(b))), \neg Q(y,z)\}$
    (b) $\{\neg Q(h(b), w), H(w,a)\}$
    (c) $\{\neg P(a, w, f(h(b))), H(x,a)\}$
    (d) $\{P(a, u, f(h(u))), H(u,a), Q(h(b), b)\}$
    (e) $\{\neg H(v,a)\}$

12. Víme, že

    (a) Pokud je cihla na jiné cihle, tak není na zemi.
    (b) Každá cihla je buď na zemi nebo na jiné cihle.
    (c) Žádná cihla není na cihle, která je na další cihle.

    Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že když je cihla na jiné cihle, ta spodní je na zemi.

13. Víme, že

    (a) Každý holič holí každého, kdo se neholí sám.
    (b) Žádný holič neholí někoho, kdo se holí sám.

    Vyjádřete to v predikátové logice a rezoluční metodou dokažte, že žádný holič neexistuje.