Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 12

7. ledna 2014

1. Uvažme struktury $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ se standardními uspořádáními.
   (a) Jsou navzájem elementárně neekvivalentní?
   (b) Jsou navzájem neizomorfní?
   (c) Určete kolik automorfismů tyto struktury mají.

2. Mějme jazyk $L = \langle U \rangle$ s rovností, kde U je unární relační symbol.
   (a) Pro dané $n \in \mathbb{N}^+$ vyjádřete *"$U(x)$ platí právě pro n prvků x"* formulí φ.
   (b) Je teorie $T = \{\varphi\}$ kompletní?
   (c) Je T ω-kategorická?
   (d) Určete izomorfní spektrum teorie T (stačí pro nejvýše spočetné kardinality).
   (e) Nalezeněte nějakou jednoduchou kompletní extenzi teorie T.
   (f) Určete všechny navzájem neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T.

3. Nechť T je extenze teorie $DeLO$ (tj. hustých lineárních uspořádání bez konců) o nový konstantní symbol c (a žádné axiomy navíc).
   (a) Je T ω-kategorická?
   (b) Je T kompletní?
   (c) Platí totéž pokud místo $DeLO$ vezmeme teorii $DeLO^+$ (hustá lineární uspořádání s maximálním prvkem a bez minimálního prvku)?

4. Nechť K je třída nekonečných grup.
   (a) Je K axiomatizovatelná?
   (b) Je K konečně axiomatizovatelná?
   (c) Je K otevřeně axiomatizovatelná?

5. Zadefinujte (v příslušném jazyce) množinu
   (a) kořenů polynomu $x^2 + 3$ v tělese $\mathcal{A}$,
   (b) společných sousedů vrcholů a, b v grafu $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$,
   (c) $(\mathbb{N} \times \{1\} \times \mathbb{N}) \setminus (\{0\} \times \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \setminus \{0\}))$ v struktuře $\langle \mathbb{N}, S, 0 \rangle$.

6. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, abs^{\mathbb{R}} \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle abs \rangle$, kde abs je unární funkční symbol, $\mathbb{R}$ jsou reálná čísla a $abs^{\mathbb{R}}$ je absolutní hodnota v $\mathbb{R}$.
   (a) Ukažte, že množiny $\{0\}$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, 0)$ jsou definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů.
   (b) Ukažte, že množiny $\{1\}$, $\{-1, 1\}$, $(1, 2)$ nejsou definovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů.
   (c) Určete všechny automorfismy $\mathcal{A}$.
   (d) Určete $\mathrm{Df}^1(\mathcal{A}, \emptyset)$, tj. všechny definovatelné množiny v $\mathcal{A}$ bez parametrů.

7. Nechť $\underline{n}$ pro $n \in \mathbb{N}$ označuje n-tý *numerál*. Dokažte v Robinsonově aritmetice Q, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}$
   (a) $Q \vdash \underline{m} = 0$, právě když $m = 0$,
   (b) $Q \vdash \underline{m} + \underline{n} = \underline{m + n}$,
   (c) $Q \vdash \underline{m} \leq \underline{n}$, právě když $m \leq n$.

8. Dokažte v Peanově aritmetice PA

   (a) $PA \vdash S(x) + y = S(x + y)$,
   (b) $PA \vdash 0 + x = x + 0$,
   (c) $PA \vdash x + y = y + x$.