Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 2

15. října 2013

1. Dokažte či vyvraťte, že následující množiny logických spojek jsou univerzální.
   (a) $\{\downarrow\}$, kde $\downarrow$ je Peirceova spojka (NOR)
   (b) $\{\uparrow\}$, kde $\uparrow$ je Shefferova spojka (NAND)
   (c) $\{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\{\vee, \wedge, \rightarrow\}$

2. Převeďte následující výroky do DNF a CNF a) tabulkou (určením modelů), b) ekvivalentními úpravami.
   (a) $(\neg p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$
   (b) $(\neg p \rightarrow (\neg q \rightarrow r)) \rightarrow p$
   (c) $((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$

3. Pomocí implikačního grafu zjistěte, zda je následující výrok v 2-CNF splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(p_0 \vee p_2) \wedge (p_0 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_3) \wedge (p_1 \vee \neg p_4) \wedge (p_2 \vee \neg p_4) \wedge (p_0 \vee \neg p_5) \wedge$$
$$(p_1 \vee \neg p_5) \wedge (p_2 \vee \neg p_5) \wedge (p_1 \vee p_6) \wedge (p_4 \vee p_6) \wedge (p_5 \vee p_6)$$

4. Pomocí jednotkové propagace zjistěte, zda je následující Hornův výrok splnitelný, popř. nalezněte splňující ohodnocení.

$$(\neg p_1 \vee \neg p_3 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge p_1 \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$
$$(\neg p_2 \vee \neg p_4 \vee p_1) \wedge (p_4 \vee \neg p_3 \vee \neg p_2) \wedge (\neg p_4 \vee p_5)$$

5. Nalezněte DNF i CNF reprezentaci Booleovské funkce $\mathrm{maj}\colon {}^3 2 \rightarrow 2$, definovanou jako převládající hodnota ze tří (majorita).

6. Nechť $\mathrm{maj}_n\colon {}^{3} {}^{n}2 \rightarrow 2$ je funkce majority po složkách, tj. např

$$\mathrm{maj}_4((0,1,0,1),(1,1,0,0),(1,1,0,0)) = (1,1,0,0)$$

   Řekneme, že množina $K \subseteq {}^n 2$ je *mediánová*, je-li uzavřená na funkci maj_n.
   (a) Dokažte, že pro každý výrok φ v 2-CNF je $M(\varphi)$ mediánová množina.
   (b) Dokažte, že je-li $K \subseteq {}^n 2$ mediánová množina, existuje výrok φ v 2-CNF o n-proměnných takový, že $M(\varphi) = K$.

7. Uvažme teorii $T = \{\neg q \rightarrow (\neg p \vee q),\ \neg p \rightarrow q,\ r \rightarrow q\}$. Které výroky jsou pravdivé / lživé / nezávislé / splnitelné / ekvivalentní v T?
   (a) p, q, r, s
   (b) $p \vee q$, $p \vee r$, $p \vee s$, $q \vee s$
   (c) $p \wedge q$, $q \wedge s$, $p \rightarrow q$, $s \rightarrow q$

8. Uvažme teorii $T = \{p_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}), q_i \rightarrow (p_{i+1} \vee q_{i+1}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ nad $\mathrm{var}(T)$.
   (a) Které výroky ve tvaru $p_i \rightarrow p_j$ jsou důsledkem T?
   (b) Které výroky tvaru $p_i \rightarrow (p_j \vee q_j)$ jsou důsledkem T?
   (c) Určete všechny modely teorie T.

9. Dokažte či vyvraťte (popř. uveďte správný vztah), že pro libovolnou teorii T a výroky φ, ψ nad $\mathbb{P}$ platí

   (a) $T \models \varphi$, právě když $T \not\models \neg\varphi$

   (b) $T \models \varphi$ a $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \wedge \psi$

   (c) $T \models \varphi$ nebo $T \models \psi$, právě když $T \models \varphi \vee \psi$

   (d) $T \models \varphi \to \psi$ a $T \models \psi \to \chi$, právě když $T \models \varphi \to \chi$