## Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 4

29. října 2013

1. Nechť $|\mathbb{P}| = n$ a $\varphi \in \mathrm{VF}_{\mathbb{P}}$ s $|M(\varphi)| = m$.
   (a) Kolik je neekvivalentních výroků $\psi$ takových, že $\varphi \models \psi$ nebo $\psi \models \varphi$?
   (b) V kolika neekvivalentních teoriích nad $\mathbb{P}$ platí $\varphi$? V kolika neekvivalentních *kompletních* teoriích nad $\mathbb{P}$ platí $\varphi$?
   (c) Kolik je neekvivalentních teorií $T$ nad $\mathbb{P}$ takových, že $T \cup \{\varphi\}$ je bezesporná?
   (d) Nechť navíc $\{\varphi, \psi\}$ je sporná a $|M(\psi)| = p$. Kolik je neekvivalentních výroků $\chi$ takových, že $\varphi \vee \psi \models \chi$? V kolika neekvivalentních teoriích platí $\varphi \vee \psi$?
2. Pomocí tablo metody dokažte následující výroky.
   (a) $(p \to (q \to p))$
   (b) $p \leftrightarrow \neg\neg p$
   (c) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
   (d) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
   (e) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

   Jsou zkonstruovaná tabla systematická?
3. Pomocí tablo metody nalezněte všechny modely následujících teorií.
   (a) $\{(\neg p \vee q) \to (\neg q \vee r)\}$
   (b) $\{\neg q \to (\neg p \vee q),\ \neg p \to q,\ r \to q\}$
   (c) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\}$
4. Tablo metodou dokažte, či nalezněte protipříklad, že
   (a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$,
   (b) $\{q \to p,\ r \to q,\ (r \to p) \to s\} \models s$,
   (c) $\{p \to r,\ p \vee q,\ \neg s \to \neg q\} \models r \to s$.
5. Sestrojte atomické tablo pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR) a pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND).
6. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii $T$, formule $\varphi$, $\psi$,
   $$T \vdash \varphi \to \psi \ \text{ právě když } \ T, \varphi \vdash \psi.$$
7. Ukažte, že každé atomické tablo $\tau$ je *korektní*, tj. shoduje-li se ohodnocení $v$ s položkou v kořeni $\tau$, shoduje se i nějakou větví v $\tau$.
8. V důkazu lemmatu o úplnosti tablo metody jsme na přednášce ověřili, že shoduje-li se ohodnocení $v$ s každou položkou dokončené větve $V$ do dané hloubky $i$ vytvořujícího stromu, shoduje se i s položkou tvaru $T(\varphi \wedge \psi)$ či $F(\varphi \wedge \psi)$ na $V$, kde $\varphi \wedge \psi$ má hloubku $i + 1$. Dokažte totéž pro ostatní logické spojky.
9. Nechť $\mathcal{S}$ je spočetný neprázdný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že má *prostý selektor*, pokud existuje prostá funkce $f\colon \mathcal{S} \to \bigcup \mathcal{S}$ taková, že $f(S) \in S$ pro každé $S \in \mathcal{S}$. Dokažte, že $\mathcal{S}$ má prostý selektor, právě když má každá jeho neprázdná konečná podmnožina prostý selektor.