Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 5

5. listopadu 2013

1. Tablo metodou dokažte, či nalezněte protipříklad, že
   (a) $\{\neg q,\ p \vee q\} \models p$,
   (b) $\{q \rightarrow p,\ r \rightarrow q,\ (r \rightarrow p) \rightarrow s\} \models s$,
   (c) $\{p \rightarrow r,\ p \vee q,\ \neg s \rightarrow \neg q\} \models r \rightarrow s$.
2. Sestrojte atomické tablo pro Peirceovu spojku $\downarrow$ (NOR) a pro Shefferovu spojku $\uparrow$ (NAND).
3. Dokažte přímo (transformací tabel) větu o dedukci, tj. pro každou teorii T, formule φ, ψ,
$$T \vdash \varphi \rightarrow \psi \ \text{ právě když } \ T, \varphi \vdash \psi.$$
4. Ukažte, že každé atomické tablo τ je *korektní*, tj. shoduje-li se ohodnocení v s položkou v kořeni τ, shoduje se i nějakou větví v τ.
5. V důkazu lemmatu o úplnosti tablo metody jsme na přednášce ověřili, že shoduje-li se ohodnocení v s každou položkou dokončené větve V do dané hloubky i vytvořujícího stromu, shoduje se i s položkou tvaru $T(\varphi \wedge \psi)$ či $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, kde $\varphi \wedge \psi$ má hloubku $i+1$. Dokažte totéž pro ostatní logické spojky.
6. Nechť $\mathcal{S}$ je spočetný neprázdný systém (množina) neprázdných konečných množin. Řekneme, že má *prostý selektor*, pokud existuje prostá funkce $f\colon \mathcal{S} \rightarrow \bigcup \mathcal{S}$ taková, že $f(S) \in S$ pro každé $S \in \mathcal{S}$. Dokažte, že $\mathcal{S}$ má prostý selektor, právě když má každá jeho neprázdná konečná podmnožina prostý selektor.
7. Nechť φ je výrok $\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.
   (a) Sestrojte tablo důkaz výroku φ.
   (b) Převeďte $\neg\varphi$ do CNF a množinové reprezentace.
   (c) Nalezněte rezoluční vyvrácení $\neg\varphi$, tj. důkaz φ.
8. Nalezněte rezoluční uzávěry $\mathcal{R}(S)$ pro následující formule S.
   (a) $\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q\}, \{\neg p, q\}\}$
   (b) $\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{p, \neg q\}\}$
   (c) $\{\{p, \neg q, r\}, \{q, r\}, \{\neg p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}\}$
9. Vyvraťte rezolucí následující výroky.
   (a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$
   (b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$
10. Dokažte rezolucí, že v teorii $T = \{\neg p \rightarrow \neg q, \neg q \rightarrow \neg r, (r \rightarrow p) \rightarrow s\}$ platí s, tj. $T \models s$.
11. Dokažte, že je-li $S = \{C_1, C_2\}$ splnitelná a C je rezolventa C_1 a C_2, je i C splnitelná.
12. Sestrojte *strom dosazení* pro formuli $S = \{\{p, r\}, \{q, \neg r\}, \{\neg q\}, \{\neg p, t\}, \{\neg s\}, \{s, \neg t\}\}$.