Cvičení z výrokové a predikátové logiky - 9

3. prosince 2013

1. Víme, že

   (a) všichni vinni lžou,

   (b) alespoň jeden obviněný je svědek,

   (c) svědci nelžou.

   Tablo metodou dokažte, že ne všichni obvinění jsou vinni.

2. Označme $L(x, y)$ predikát *"existuje let z x do y"* a $S(x, y)$ predikát *"existuje spojení z x do y"*. Víme, že

   (a) z Prahy se dá letět do Horní Lhoty, Londýna a New Yorku, z New Yorku do Paříže,

   (b) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to L(y, x))$,

   (c) $(\forall x)(\forall y)(L(x, y) \to S(x, y))$,

   (d) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(S(x, y) \wedge L(y, z) \to S(x, z))$.

   Tablo metodou dokažte, že z Horní Lhoty existuje spojení do Paříže.

3. Nechť φ, ψ jsou sentence nebo jsou ve volné proměnné x, značíme $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Nalezněte tablo důkazy následujících formulí.

   (a) $(\exists x)(\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x)\varphi(x) \vee (\exists x)\psi(x)$,

   (b) $(\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)$,

   (c) $(\varphi \vee (\forall x)\psi(x)) \to (\forall x)(\varphi \vee \psi(x))$, kde x není volná ve φ,

   (d) $(\varphi \wedge (\exists x)\psi(x)) \to (\exists x)(\varphi \wedge \psi(x))$, kde x není volná ve φ,

   (e) $(\exists x)(\varphi \to \psi(x)) \to (\varphi \to (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,

   (f) $(\exists x)(\varphi \wedge \psi(x)) \to (\varphi \wedge (\exists x)\psi(x))$, kde x není volná ve φ,

   (g) $\neg(\exists x)\varphi(x) \to (\forall x)\neg\varphi(x)$,

   (h) $(\forall x)\neg\varphi(x) \to \neg(\exists x)\varphi(x)$,

   (i) $(\exists x)(\varphi(x) \to \psi) \to ((\forall x)\varphi(x) \to \psi)$, kde x není volná ve ψ,

   (j) $((\exists x)\varphi(x) \to \psi) \to (\forall x)(\varphi(x) \to \psi)$, kde x není volná ve ψ.

4. Nechť φ, ψ jsou ve volných proměnných x, y, z a w je proměnná nevyskytující se ve φ, ψ. Nalezněte tablo důkazy (uzávěrů) následujících formulí.

   (a) $(\forall x)(\exists y)\neg(\forall z)\varphi \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists z)\neg\varphi$,

   (b) $(\exists x)(\forall y)((\forall z)\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x)(\forall y)(\forall w)(\varphi(z/w) \vee \psi)$,

   (c) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \vee (\exists z)\psi) \leftrightarrow (\forall x)(\exists y)(\exists w)(\varphi \vee \psi(z/w))$,

   (d) $(\forall x)(\exists y)(\varphi \to (\forall z)\psi) \to (\forall x)(\exists y)(\forall w)(\varphi \to \psi(z/w))$.

5. Nechť T^* je teorie s axiomy rovnosti. Tablo metodou dokažte, že

   (a) $T^* \models x = y \;\to\; y = x$ (symetrie $=$)

   (b) $T^* \models (x = y \;\wedge\; y = z) \;\to\; x = z$ (tranzitivita $=$)

   Nápověda: pro (a) v axiomu rovnosti (iii) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = x$, $y_1 = y$ a $y_2 = x$,
   pro (b) vezměte $x_1 = x$, $x_2 = y$, $y_1 = x$ a $y_2 = z$.

6. Dokažte větu o konstantách syntakticky pomocí transformací tabel.

   Věta 1. *Nechť φ je formule jazyka L ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a T je teorie jazyka L. Označme L' rozšíření L o nové konstantní symboly $c_1, \ldots, c_n$ a T' teorii T nad L'. Pak*

   $$T \vdash (\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\varphi \quad \textit{právě když} \quad T' \vdash \varphi(x_1/c_1, \ldots, x_n/c_n).$$

7. Dokažte větu o dedukci pomocí transformací tabel.

   Věta 2. *Pro každou teorii T (v uzavřeném tvaru) a sentence φ, ψ,*

   $$T \vdash \varphi \to \psi \quad \textit{právě když} \quad T, \varphi \vdash \psi.$$

8. Nechť L je jazyk s rovností obsahující binární relační symbol $\leq$ a T je teorie, jež má nekonečný model a platí v ní axiomy pro lineární uspořádání. Pomocí věty o kompaktnosti dokažte, že T má model $\mathcal{A}$ s *nekonečným klesajícím řetězcem*, tj. v A existují prvky c_i pro $i \in \mathbb{N}$ s

   $$\cdots < c_{n+1} < c_n < \cdots < c_0.$$

   (Tento příklad ukazuje, že pojem *dobrého uspořádání* není definovatelný v jazyce 1. řádu.)

9. Převeďte následující formule do prenexního tvaru.

   (a) $(\forall y)((\exists x)P(x,y) \to Q(y,z)) \wedge (\exists y)((\forall x)R(x,y) \vee Q(x,y))$

   (b) $(\exists x)R(x,y) \leftrightarrow (\forall y)P(x,y)$

   (c) $\neg((\forall x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists x)(\exists y)R(x,y)) \wedge (\forall x)\neg(\exists y)Q(x,y)$