Zkouška VPL - písemná část

3. ledna 2014

1. Nechť $T = \{(r \to p) \to \neg q,\ \neg q \to p,\ \neg(r \wedge q)\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
   (a) Tablo metodou nalezněte všechny modely teorie T. *Nápověda:* $|M^{\mathbb{P}}(T)| = 2$. *(4b)*
   (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. *(2b)*
   (c) Je teorie T konzervativní extenzí nějaké teorie nad $\{p, q\}$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních bezesporných extenzí teorie T nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Víme, že
   (i) všichni vinni lžou,
   (ii) alespoň jeden obviněný je svědek,
   (iii) svědci nelžou.

   Chceme (rezolucí) dokázat, že

   (iv) ne všichni obvinění jsou vinni.

   (a) Uvedená tvrzení vyjádřete formulemi jazyka $L = \langle V, L, O, S\rangle$ bez rovnosti, kde všechny symboly jsou unární relační a reprezentují (po řadě) relace být vinnen, lhář, obviněn, svědek. *(2b)*
   (b) Nechť $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \neg\varphi_4\}$ je teorie jazyka L, kde $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ jsou formule odpovídající po řadě tvrzením (i) – (iv). Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' v otevřeném tvaru (nad vhodně rozšířeným jazykem). *(2b)*
   (c) Převeďte T' do množinové reprezentace. *(2b)*
   (d) Ukažte, že $T' \vdash_R \square$. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku podtrhněte rezolvované literály a uveďte použitou unifikaci. *(4b)*

3. Nechť T je extenze teorie $DeLO$ (tj. hustých lineárních uspořádání bez konců) v jazyce $L = \langle \leq, c_1, c_2\rangle$ s rovností bez nových axiomů, tj. pouze s rozšířeným jazykem o dva nové konstantní symboly c_1, c_2.
   (a) Určete $I(T, \omega)$, tj. počet navzájem neizomorfních spočetných modelů teorie T. *(2b)*
   (b) Určete všechny (až na ekvivalenci) jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*
   (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*
   (d) Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, \leq, 0, 1\rangle$ je struktura reálných čísel se standardním uspořádáním a konstantami $0, 1$, tedy $\mathcal{A}$ je model teorie T. Nalezněte příklady množiny definovatelné a množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*