Zkouška VPL - písemná část

15. ledna 2014

1. Jsou dány dva výroky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$:

$$\begin{aligned} \varphi:&\quad (p \vee r) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg r), \\ \psi:&\quad (\neg s \vee \neg r) \wedge (\neg t \vee s) \wedge \neg p. \end{aligned}$$

   (a) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda je výrok $\varphi \wedge \psi$ splnitelný. Pokud ano, nalezněte nějaké ohodnocení splňující $\varphi \wedge \psi$. *(2b)*

   (b) Určete množinu $M^{\mathbb{P}'}(\varphi)$ všech modelů φ nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r\}$. *(2b)*

   (c) Kolik existuje neekvivalentních jednoduchých bezesporných extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad $\mathbb{P}'$? Kolik z nich je kompletních? *(2b)*

   (d) Je teorie $\{\varphi, \psi\}$ nad $\mathbb{P}$ konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad $\mathbb{P}'$? *(2b)*

2. Buď $T = \{P(x) \vee Q(x)\}$ teorie v jazyce $L = \langle P, Q\rangle$ bez rovnosti, kde P, Q jsou unární relační symboly, a L_C buď extenze L o nové různé konstantní symboly c_i s $i \in \mathbb{N}$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\bot$ v kořeni, kde $\bot$ je sentence $(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall x)P(x)$. *(3b)*

   (b) V tablu z předchozího bodu nalezněte větev V a kanonický model $\mathcal{A}$ z V takový, že $\mathcal{A} \models P(x)$. *(3b)*

   (c) Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*

   (d) Buď T' extenze T o definice nových binárních relačních symbolů R a S po řadě formulemi $(P(x) \wedge \neg Q(y))$ resp. $(\neg P(x) \wedge Q(y))$. Napište formuli $\varphi(x, y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x, y) \leftrightarrow (R(x, x) \vee S(y, y))$. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle <, f, g, h\rangle$ s rovností, kde f, g, h jsou unární funkční symboly a $<$ je binární relační symbol, s axiomy

$$\begin{aligned} \varphi_1:&\quad (\forall u)(\exists v)(\forall x)(v < x \rightarrow u < f(x)), \\ \varphi_2:&\quad (\exists u)(\forall v)(\exists x)(v < x \wedge \neg(u < g(x))), \\ \varphi_3:&\quad (\exists u)(\forall x)\neg(u < h(x)). \end{aligned}$$

   (a) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

   (b) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, <, \mathrm{id}, \mathrm{tg}', \sin\rangle$, kde $<$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$, $\mathrm{tg}'(k\pi/2) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{tg}'(r) = \mathrm{tg}(r)$ (tg je funkce tangens) pro $r \neq k\pi/2$ s $k \in \mathbb{Z}$ a sin je funkce sinus. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

   (c) Rezolucí ukažte, že $T' \cup \{f(x) = g(x)\}$ je nesplnitelná teorie. Namísto axiomů rovnosti pro jazyk L' můžete použít *(slabší)* axiom

$$x_2 = y_2 \rightarrow (x < x_2 \rightarrow x < y_2).$$

   Nápověda: V tom případě stačí čtyři rezoluční kroky. (4b)

   (d) Je formule $\neg(f(x) = g(x))$ dokazatelná, vyvratitelná nebo nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*