

Zkouška VPL - písemná část

22. ledna 2014

1. Mějme tři bratry, přičemž o každém víme, že buď vždy říká pravdu anebo vždy lže.
 - (i) Nejstarší říká: “Oba mí bratři jsou lháři.”
 - (ii) Prostřední říká: “Nejmłodší je lhář.”
 - (iii) Nejmłodší říká: “Nejstarší je lhář.”Nechť prvovýroky p_1, p_2, p_3 reprezentují (po řadě), že “nejstarší / prostřední / nejmlodší bratr je pravdomluvný” a označme $\mathbb{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$.
 - (a) Napište výroky (ve tvaru ekvivalence) $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad \mathbb{P} reprezentující znalosti vyplývající (po řadě) z (i), (ii), (iii). (2b)
 - (b) Určete množinu $M^{\mathbb{P}}(T)$ všech modelů teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ nad \mathbb{P} . Vyplývá z T , že některý z bratrů je pravdomluvný? (2b)
 - (c) Zvolte si libovolný model $v \in M^{\mathbb{P}}(T)$. Napište konjunkci literálů ψ_v s $M^{\mathbb{P}}(\psi_v) = \{v\}$ a rezoluci dokažte, že $T \models \psi_v$. (4b)
 - (d) Odpoví-li nám prostřední bratr na otázku: “Složil už někdo z vás zkoušku z logiky?”, budeme vědět, jak na tutéž otázku odpoví ostatní bratři? Uveďte zdůvodnění. (2b)
2. Nechť $T = \{(\exists x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\exists x)(\neg R(x) \rightarrow \neg Q(x))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, Q, R \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q, R jsou unární relační symboly, a označme φ sentenci $(\exists x)(P(x) \rightarrow R(x))$.
 - (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni. (4b)
 - (b) Z bezesporné větve předchozího tabla sestrojte model \mathcal{A} teorie T , ve kterém φ neplatí. (2b)
 - (c) Je φ dokazatelná, vyvratitelná, nebo nezávislá v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Má teorie T konzervativní kompletní extenzi? Uveďte zdůvodnění. (2b)
3. Nechť $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Z}, \text{abs}^A \rangle$ je struktura jazyka $L = \langle \text{abs} \rangle$ s rovností, kde abs je unární funkční symbol a abs^A je funkce absolutní hodnoty v \mathbb{Z} .
 - (a) Je teorie $Th(\mathcal{A})$ struktury \mathcal{A} otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Nalezněte expanzi \mathcal{A}' struktury \mathcal{A} do vhodně rozšířeného jazyka tak, že jedinou podstrukturou \mathcal{A}' je \mathcal{A} . (2b)
 - (c) Nalezněte příklady množiny definovatelné a množiny nedefinovatelné v \mathcal{A} bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Nechť $\mathcal{B} = \langle \mathbb{N}, \text{id} \rangle$ je struktura stejného jazyka, kde id je identita. Je $Th(\mathcal{A})$ extenzí $Th(\mathcal{B})$? Uveďte zdůvodnění. (2b)