# Zkouška VPL - písemná část

24. ledna 2014

1. Nechť prvovýroky $r$, $s$, $t$ reprezentují (po řadě), že *"Radka / Sára / Tom je ve škole"* a označme $\mathbb{P} = \{r, s, t\}$. Víme, že

   ($i$) *Není-li Tom ve škole, není tam ani Sára.*

   ($ii$) *Radka bez Sáry do školy nechodí.*

   ($iii$) *Není-li Radka ve škole, je tam Tom.*

   (a) Napište výroky $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ nad $\mathbb{P}$ vyjadřující po řadě ($i$), ($ii$), ($iii$) a pomocí implikačního grafu ukažte, že teorie $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ je bezesporná. *(3b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že z $T$ vyplývá, že *Tom je ve škole. (3b)*

   (c) Určete množinu $M^{\mathbb{P}}(T)$ všech modelů teorie $T$ nad $\mathbb{P}$. *(2b)*

   (d) Kolik je (až na ekvivalenci) výroků nad $\mathbb{P}$, které jsou nezávislé v $T$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T$ je teorie jazyka $L = \langle E, P, R, c\rangle$ bez rovnosti, kde $E, P, R$ jsou binární relační symboly a $c$ je konstantní symbol, s axiomy

$$(\exists x)(\exists y)(E(x,y) \wedge E(y,x) \wedge E(y,c)),$$
$$(\forall z)(E(x,z) \wedge E(z,y) \rightarrow P(x,y)),$$
$$(\forall x)(\forall y)(P(x,z) \wedge E(z,y) \rightarrow R(x,y)).$$

   Chceme LI-rezolucí dokázat, že $T \models \varphi$, kde $\varphi$ je sentence $(\exists x)(P(x,x) \wedge R(x,c))$.

   (a) Skolemizací nalezněte otevřenou konzervativní extenzi $T'$ teorie $T$. *(1b)*

   (b) Převeďte $T^* = T' \cup \{\neg\varphi\}$ do množinové reprezentace na Hornovu formuli obsahující jediný *cíl* (tj. klauzuli bez pozitivních literálů) $G$. *(2b)*

   (c) Ukažte, že $T^* \vdash_{LI} \square$ pomocí lineárně vstupní rezoluce začínající cílem $G$. *(4b)*

   (d) Nalezněte substituci $\sigma$ takovou, že $T' \models \varphi'\sigma$, kde $\varphi'$ je otevřené jádro sentence $\varphi$. *(1b)*

   (e) Definuje formule $\varphi'(x)$ v každém modelu teorie $T$ jednoprvkovou množinu? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2),\ \neg(\exists x)(f(x) = x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde $f$ je unární funkční symbol.

   (a) Určete izomorfní spektrum $I(T, \kappa)$ teorie $T$ pro nejvýše spočetné $\kappa$. *(2b)*

   (b) Je teorie $T$ konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle\rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (c) Jsou teorie $T$ a $T'$ kompletní?. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je teorie $T$ otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*