Zkouška VPL - písemná část

29. ledna 2014

1. Jsou dány dva výroky nad množinou prvovýroků $\mathbb{P} = \{p, q, r, s, t\}$:

$$\begin{aligned} \varphi: &\quad (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg s) \wedge \neg q, \\ \psi: &\quad (p \vee t) \wedge (\neg q \vee \neg r). \end{aligned}$$

   (a) Pomocí implikačního grafu rozhodněte, zda je výrok $\varphi \wedge \psi$ splnitelný. Pokud ano, nalezněte nějaké ohodnocení splňující $\varphi \wedge \psi$. *(2b)*

   (b) Určete množinu $M^{\mathbb{P}'}(\varphi)$ všech modelů φ nad $\mathbb{P}' = \{p, q, r, s\}$. *(2b)*

   (c) Kolik existuje navzájem neekvivalentních výroků nad $\mathbb{P}'$ pravdivých v $\{\varphi\}$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je teorie $\{\varphi, \psi\}$ nad $\mathbb{P}$ konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ nad $\mathbb{P}'$? *(2b)*

2. Buď $T = \{P(x, c) \vee P(x, d)\}$ teorie v jazyce $L = \langle P, c, d \rangle$ bez rovnosti, kde P je binární relační symbol a c, d jsou konstantní symboly, a L_C buď extenze L o nové různé konstantní symboly c_i s $i \in \mathbb{N}$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\bot$ v kořeni, kde $\bot$ je sentence $P(c, c) \wedge \neg P(c, c)$. *(3b)*

   (b) V tablu z předchozího bodu nalezněte větev V a kanonický model $\mathcal{A}$ z V takový, že $\mathcal{A} \models P(x, d) \wedge \neg P(c, c)$. *(3b)*

   (c) Nalezněte tři neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*

   (d) Buď T' extenze T o definice nových binárních relačních symbolů R a Q po řadě formulemi $(P(x, c) \wedge \neg P(d, y))$ resp. $(\neg P(x, d) \wedge P(c, y))$. Napište formuli $\varphi(x, y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x, y) \leftrightarrow (R(x, x) \vee Q(y, y))$. *(2b)*

3. Nechť T je teorie v jazyce $L = \langle 0, -, |\,|, <, f, g \rangle$ s rovností, kde 0 je konstantní symbol, $|\,|, f, g$ jsou unární funkční symboly, $-$ je binární funkční a $<$ je binární relační symbol, s axiomy

$$\begin{aligned} \varphi_1: &\quad (\forall u)(\forall \varepsilon)(0 < \varepsilon \rightarrow (\exists \delta)(0 < \delta \wedge (\forall x)(|x - u| < \delta \rightarrow |f(x) - f(u)| < \varepsilon))), \\ \varphi_2: &\quad (\exists u)(\exists \varepsilon)(0 < \varepsilon \wedge (\forall \delta)(0 < \delta \rightarrow (\exists x)(|x - u| < \delta \wedge \neg(|g(x) - g(u)| < \varepsilon)))). \end{aligned}$$

   (a) Nalezněte formule φ_1', φ_2' v prenexním tvaru a ekvivalentní s φ_1 resp. φ_2. *(2b)*

   (b) Pomocí skolemizace sestrojte otevřeně axiomatizovanou teorii T' (případně v širším jazyce L') ekvisplnitelnou s T. *(2b)*

   (c) Buď $\mathcal{A} = \langle \mathbb{R}, 0, -, |\,|, <, \mathrm{id}, \mathrm{sgn} \rangle$, kde $0, -, |\,|, <$ má svůj obvyklý význam na $\mathbb{R}$, $\mathrm{id}(r) = r$ pro všechna $r \in \mathbb{R}$ a $\mathrm{sgn}(0) = 0$, $\mathrm{sgn}(r) = |r|/r$ pro $r \neq 0$. Nalezněte expanzi $\mathcal{A}'$ struktury $\mathcal{A}$ do jazyka L' takovou, že $\mathcal{A}' \models T'$. *(2b)*

   (d) Rezolucí ukažte, že $T' \cup \{|f(x) - f(y)| < \varepsilon \rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon\}$ je nesplnitelná teorie.
   Nápověda: Postupně spolu rezolvujte klauzule, jež vznikly z "proti sobě odpovídajících" podformulí ve φ_1 a φ_2. Stačí sedm rezolučních kroků bez použití axiomů rovnosti. (4b)