Zkouška VPL - písemná část

5. února 2014

1. Nechť $G = \langle V, E\rangle$ je neorientovaný graf bez smyček, množina V jeho vrcholů má velikost $0 < n \in \mathbb{N}$ a E je množina jeho hran ($E \subseteq \{\{u, v\} \mid u \neq v \in V\}$). Říkáme, že G je *k-obarvitelný*, kde $0 < k \in \mathbb{N}$, pokud lze vrcholy G obarvit k barvami tak, že

   (i) každý vrchol je obarvený některou z barev,

   (ii) žádný vrchol není obarven více než jednou barvou,

   (iii) vrcholy spojené hranou mají různé barvy.

   Nechť $\mathbb{P} = \{p^i_j \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$ je množina prvovýroků, kde p^i_j reprezentuje, že *“i-tý vrchol je obarvený j-tou barvou”*.

   (a) Napište výroky φ_i, ψ_i a $\chi_{i,i'}$ nad $\mathbb{P}$ vyjadřující, že

   $$\begin{aligned} \varphi_i: &\quad \text{“}i\text{-tý vrchol je obarvený některou z barev”}, \\ \psi_i: &\quad \text{“}i\text{-tý vrchol není obarven více než jednou barvou”}, \\ \chi_{i,i'}: &\quad \text{“}i\text{-tý a } i'\text{-tý vrchol mají různé barvy”}, \end{aligned}$$

   kde $1 \leq i \neq i' \leq n$. Pomocí φ_i, ψ_i, $\chi_{i,i'}$ napište teorii T^k_G vyjadřující (i), (ii), (iii). *(2b)*

   (b) Nechť K_3 je kompletní graf na třech vrcholech (tj. $V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$) a $k = 2$. Nalezněte množinovou reprezentaci teorie $T' = T^2_{K_3} \cup \{p^1_1\}$. *(2b)*

   (c) Ukažte rezolucí, že T' je nesplnitelná teorie. *(4b)*

   (d) Pro $1 < n \in \mathbb{N}$ nechť C_n značí kružnici délky n (tj. $V = \{1, \ldots, n\}$, $E = \{\{i, i + 1\} \mid 1 \leq i \leq n - 1\} \cup \{\{n, 1\}\}$). Určete počet modelů teorie $T^2_{C_n}$ pro všechna $1 < n \in \mathbb{N}$. *(2b)*

2. Jsou dána následující tvrzení o hostech restaurace:

   (i) Existuje host, který pokud pije pivo, tak pijí pivo všichni hosté.

   (ii) Existuje host, který pokud pije pivo, tak všichni hosté pijí rum.

   (a) Formalizujte tvrzení (i), (ii) po řadě jako sentence φ, ψ v jazyce $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R jsou unární relační symboly a $P(x)$, $R(x)$ značí, že *“host x pije pivo”*, resp. *“host x pije rum”*. Poté formule φ, ψ převeďte do prenexního tvaru. *(2b)*

   (b) Tablo metodou rozhodněte, které z formulí φ, ψ jsou logicky pravdivé. Jako zdůvodnění uveďte příslušná dokončená tabla. *(4b)*

   (c) Zvolte libovolnou bezespornou větev V v jednom z tabel z (b) a sestrojte kanonický model $\mathcal{A}$ z větve V. *(2b)*

   (d) Je teorie $\{\psi\}$ v jazyce L konzervativní extenzí teorie $\{\varphi\}$ v jazyce $L' = \langle P\rangle$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Buď $T = \{(\forall x)(\exists y)S(y) = x,\ S(x) = S(y) \rightarrow x = y\}$ teorie v jazyce $L = \langle S\rangle$ s rovností, kde S je unární funkční symbol.

   (a) Nalezněte extenzi T' teorie T o definici nového unárního funkčního symbolu P takovou, že $T' \models S(P(x)) = x$. *(2b)*

   (b) Napište formuli $\varphi(x, y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x, y) \leftrightarrow P(P(x)) = y$. *(2b)*

   (c) Je teorie T' otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Buď $\mathcal{Z}_k = \langle \mathbb{Z}, F_k\rangle$, kde $0 < k \in \mathbb{N}$ a $F_k(m) = m + k$ pro $m \in \mathbb{Z}$. Kolik má struktura $\mathcal{Z}_k$ podstruktur? Kolik má $\mathcal{Z}_2$ vzájemně neizomorfních podstruktur? *(2b)*