Zkouška VPL - písemná část

12. února 2014

1. Kdo by se chtěl ucházet o ruku krásné Porcie, musí (rezolucí) zjistit, v které skříňce, zlaté, stříbrné, či olověné je ukryta její podobizna. Víme, že

   (i) Podobizna Porcie je v právě jedné skříňce.

   (ii) Alespoň jeden nápis na skříňkách je pravdivý.

   (iii) Alespoň jeden nápis na skříňkách je nepravdivý.

   (iv) Nápis na zlaté skříňce říká: *"Podobizna není v této skříňce."*

   (v) Nápis na stříbrné skříňce říká: *"Podobizna není v zlaté skříňce."*

   (vi) Nápis na olověné skříňce říká: *"Podobizna je v této skříňce."*

   Nechť prvovýroky z, s, o reprezentují (po řadě), že *"podobizna je v zlaté / stříbrné / olověné skříňce"* a prvovýroky p_z, p_s, p_o reprezentují (po řadě), že *"nápis na zlaté / stříbrné / olověné skříňce je pravdivý."* Dále označme $\mathbb{P}' = \{z, s, o, p_z, p_s, p_o\}$.

   (a) Napište výroky φ_1, φ_2, φ_3 nad $\mathbb{P}'$ vyjadřující po řadě (i), (ii), (iii) a dále výroky (ve tvaru ekvivalence) φ_4, φ_5, φ_6 nad $\mathbb{P}'$ reprezentující znalosti vyplývající (po řadě) z (iv), (v), (vi). *(2b)*

   (b) Pomocí ekvivalentních úprav (náhrada podformule za ekvivalentní formuli) nalezněte teorii T nad $\mathbb{P} = \{z, s, o\}$ takovou, že teorie $T' = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_6\}$ nad $\mathbb{P}'$ je konzervativní extenzí teorie T. *(2b)*

   (c) Rezolucí z teorie T zjistěte, v které skříňce je ukryta podobizna Porcie. *(4b)*

   (d) Je teorie T' nad $\mathbb{P}'$ kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\exists y)(P(y) \rightarrow P(x))\}$ je teorie v jazyce $L = \langle P \rangle$ bez rovnosti, kde P je unární relační symbol.

   (a) Nalezněte otevřenou konzervativní extenzi T' teorie T v jazyce L' rozšířeném pouze o unární funkční symbol f. *(2b)*

   (b) Sestrojte dokončené tablo z teorie T' s položkou $F(\forall x)P(x)$ v kořeni. *(3b)*

   (c) V tablu z předchozího bodu nalezněte bezespornou větev V a kanonický model $\mathcal{A}$ z V takový, že $\mathcal{A} \models \neg P(x)$. *(3b)*

   (d) Je formule $(\forall x)P(x)$ pravdivá, lživá, či nezávislá v T'? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť T je extenze teorie $DeLO^-$ (tj. hustých lineárních uspořádání s minimálním prvkem a bez maximálního prvku) v jazyce $L = \langle \leq, c \rangle$ s rovností bez nových axiomů, tj. pouze s rozšířeným jazykem o nový konstantní symbol c.

   (a) Určete $I(T, \omega)$, tj. počet navzájem neizomorfních spočetných modelů teorie T. *(2b)*

   (b) Určete všechny (až na ekvivalenci) jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*

   (c) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Nechť $\mathcal{A} = \langle \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}, \leq, 0 \rangle$ je struktura nezáporných racionálních čísel se standardním uspořádáním a konstantou 0, tedy $\mathcal{A}$ je model teorie T. Nalezněte příklady množiny definovatelné a množiny nedefinovatelné v $\mathcal{A}$ bez parametrů. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*