Výroková a predikátová logika - VIII

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2014/2015

Tablo metoda v PL - rozdíly

- Formule v položkách budou sentence (uzavřené formule), tj. formule bez volných proměnných.
- Přidáme nová atomická tabla pro kvantifikátory.
- Za kvantifikované proměnné se budou substituovat konstantní termy dle jistých pravidel.
- Jazyk rozšíříme o nové (pomocné) konstantní symboly (spočetně mnoho) pro reprezentaci *"svědků"* položek $T(\exists x)\varphi(x)$ a $F(\forall x)\varphi(x)$.
- V dokončené větvi s položkou $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ budou instance $T\varphi(x/t)$ resp. $F\varphi(x/t)$ pro každý konstantní term t (rozšířeného jazyka).

Atomická tabla - nová

Atomická tabla jsou i následující (položkami značkované) stromy, kde φ je libovolná formule jazyka L_C ve volné proměnné x, t je libovolný konstantní term jazyka L_C a c je nový konstantní symbol z $L_C \setminus L$.

$\sharp$ $T(\forall x)\varphi(x)$ | $T\varphi(x/t)$ pro libovolný konst. term t	$*$ $F(\forall x)\varphi(x)$ | $F\varphi(x/c)$ pro *novou* konstantu c	$*$ $T(\exists x)\varphi(x)$ | $T\varphi(x/c)$ pro *novou* konstantu c	$\sharp$ $F(\exists x)\varphi(x)$ | $F\varphi(x/t)$ pro libovolný konst. term t

Poznámka *Konstantní symbol c reprezentuje "svědka" položky $T(\exists x)\varphi(x)$ či $F(\forall x)\varphi(x)$. Jelikož nechceme, aby na c byly kladeny další požadavky, je v definici tabla omezeno, jaký konstantní symbol c lze použít.*

Tablo

Konečné tablo z teorie T je binární, položkami značkovaný strom s předpisem

- (i) každé atomické tablo je konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít libovolný konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$,
- (ii) je-li P položka na větvi V konečného tabla z T, pak připojením atomického tabla pro P na konec větve V vznikne konečné tablo z T, přičemž v případě $(*)$ lze použít pouze konstantní symbol $c \in L_C \setminus L$, který se dosud nevyskytuje na V,
- (iii) je-li V větev konečného tabla z T a $\varphi \in T$, pak připojením $T\varphi$ na konec větve V vznikne rovněž konečné tablo z T.
- (iv) každé konečné tablo z T vznikne konečným užitím pravidel (i), (ii), (iii).

Tablo z teorie T je posloupnost $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ konečných tabel z T takových, že τ_{n+1} vznikne z τ_n pomocí (ii) či (iii), formálně $\tau = \cup \tau_n$.

Konstrukce tabla

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c} F((\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ T(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ F(\neg(\forall x)P(x)) \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} F(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ T(\forall x)P(x) \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} T(\exists x)\neg P(x) \\ | \\ T(\neg P(c)) \quad c \ \text{nová} \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} T(\neg P(c)) \\ | \\ FP(c) \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} T(\forall x)P(x) \\ | \qquad \text{zvol} \\ TP(c) \quad t = c \end{array}} \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\boxed{\begin{array}{c} F(\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x)) \\ | \\ T(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ F(\exists x)\neg P(x) \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} T(\neg(\forall x)P(x)) \\ | \\ F(\forall x)P(x) \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} F(\forall x)P(x) \\ | \\ FP(d) \quad d \ \text{nová} \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} F(\exists x)\neg P(x) \\ | \qquad \text{zvol} \\ F(\neg P(d)) \quad t = d \end{array}} \\
| \\
\boxed{\begin{array}{c} F(\neg P(d)) \\ | \\ TP(d) \end{array}} \\
| \\
\otimes
\end{array}
$$

Konvence

$$F((\exists x)\neg P(x) \to \neg(\forall x)P(x))$$
$$T(\exists x)\neg P(x)$$
$$F(\neg(\forall x)P(x))$$
$$T(\forall x)P(x)$$
$$T(\neg P(c)) \quad c \ \text{nové}$$
$$FP(c)$$
$$T(\forall x)P(x)$$
$$TP(c)$$
$$\otimes$$

$$F(\neg(\forall x)P(x) \to (\exists x)\neg P(x))$$
$$T(\neg(\forall x)P(x))$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$
$$F(\forall x)P(x)$$
$$FP(d) \quad d \ \text{nové}$$
$$F(\exists x)\neg P(x)$$
$$F(\neg P(d))$$
$$TP(d)$$
$$\otimes$$

Položku, dle které tablo prodlužujeme, nebudeme na větev znovu zapisovat kromě případů, kdy položka je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$.

Tablo důkaz

- Větev V tabla τ je *sporná*, obsahuje-li položky $T\varphi$ a $F\varphi$ pro nějakou sentenci φ, jinak je *bezesporná*.
- Tablo τ je *sporné*, pokud je každá jeho větev sporná.
- *Tablo důkaz* (*důkaz tablem*) sentence φ z teorie T je sporné tablo z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- φ je *(tablo) dokazatelná* z teorie T, píšeme $T \vdash \varphi$, má-li tablo důkaz z T.
- *Zamítnutí* sentence φ *tablem* z teorie T je sporné tablo z T s položkou $T\varphi$ v kořeni.
- Sentence φ je *(tablo) zamítnutelná* z teorie T, má-li zamítnutí tablem z T, tj. $T \vdash \neg\varphi$.

Příklady

- $F((\forall x)(P(x) \to Q(x)) \to ((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
  - $T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
  - $F((\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x))$
  - $T(\forall x)P(x)$
  - $F(\forall x)Q(x)$
  - $FQ(c)$ $\quad c$ nová
  - $T(\forall x)P(x)$
  - $TP(c)$
  - $T(\forall x)(P(x) \to Q(x))$
  - $T(P(c) \to Q(c))$
    - $FP(c)$
      - $\otimes$
    - $TQ(c)$
      - $\otimes$

- $F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow ((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x)))$
  - $T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
    - $F((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
      - $F(\forall x)\varphi(x)$
        - $F\varphi(c)$ $\quad c$ nová
        - $T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
        - $T(\varphi(c) \wedge \psi(c))$
        - $T\varphi(c)$
        - $T\psi(c)$
        - $\otimes$
      - $F(\forall x)\psi(x)$
        - $F\psi(d)$ $\quad d$ nová
        - $T((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
        - $T(\varphi(d) \wedge \psi(d))$
        - $T\varphi(d)$
        - $T\psi(d)$
        - $\otimes$
  - $F((\forall x)(\varphi(x) \wedge \psi(x)))$
    - $T((\forall x)\varphi(x) \wedge (\forall x)\psi(x))$
    - $T(\forall x)\varphi(x)$
    - $T(\forall x)\psi(x)$
    - $F(\varphi(e) \wedge \psi(e))$ $\quad e$ nová
      - $F\varphi(e)$
        - $T(\forall x)\varphi(x)$
        - $T\varphi(e)$
        - $\otimes$
      - $F\psi(e)$
        - $T(\forall x)\psi(x)$
        - $T\psi(e)$
        - $\otimes$

Dokončené tablo

Chceme, aby dokončená bezesporná větev poskytovala protipříklad.

Výskyt položky P ve vrcholu v tabla τ je *i-tý*, pokud v má v τ právě $i-1$ předků označených P a je *redukovaný* na větvi V skrze v, pokud

a) P není tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$ a P se vyskytuje na V jako kořen atomického tabla, tj. při konstrukci τ již došlo k rozvoji P na V, nebo

b) P je tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$, má $(i+1)$-ní výskyt na V a zároveň se na V vyskytuje $T\varphi(x/t_i)$ resp. $F\varphi(x/t_i)$, kde t_i je i-tý konstantní term (jazyka L_C).

Nechť V je větev tabla τ z teorie T. Řekneme, že

- větev V je *dokončená*, je-li sporná, nebo každý výskyt položky na V je redukovaný na V a navíc V obsahuje $T\varphi$ pro každé $\varphi \in T$,
- tablo τ je *dokončené*, pokud je každá jeho větev dokončená.

Systematické tablo - konstrukce

Nechť R je položka a $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ je (konečná či nekonečná) teorie.

(1) Za τ_0 vezmi atomické tablo pro R. V případě $(*)$ vezmi lib. $c \in L_C \setminus L$, v případě $(\sharp)$ za t vezmi term t_1. Dokud to lze, aplikuj následující kroky.

(2) Nechť v je nejlevější vrchol v co nejmenší úrovni již daného tabla τ_n obsahující výskyt položky P, který není redukovaný na nějaké bezesporné větvi skrze v. (Neexistuje-li v, vezmi $\tau'_n = \tau_n$ a jdi na (4).)

$(3a)$ Není-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ ani $F(\exists x)\varphi(x)$, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n přidáním atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze v. V případě $(*)$ za c vezmi c_i pro nejmenší možné i.

$(3b)$ Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$ či $F(\exists x)\varphi(x)$ a ve v má i-tý výskyt, za τ'_n vezmi tablo vzniklé z τ_n připojením atomického tabla pro P na každou bezespornou větev skrze v, přičemž za t vezmi term t_i.

(4) Za τ_{n+1} vezmi tablo vzniklé z τ'_n přidáním $T\varphi_n$ na každou bezespornou větev neobsahující $T\varphi_n$. (Neexistuje-li φ_n, vezmi $\tau_{n+1} = \tau'_n$.)

Systematické tablo z T pro R je výsledkem uvedené konstrukce, tj. $\tau = \cup\tau_n$.

Systematické tablo - příklad

$$T((\exists y)(\neg R(y,y) \vee P(y,y)) \wedge (\forall x)R(x,x))$$

$$T(\exists y)(\neg R(y,y) \vee P(y,y))$$

$$T(\forall x)R(x,x)$$

$$T(\neg R(c_0,c_0) \vee P(c_0,c_0)) \qquad c_0 \text{ nová}$$

$$T(\forall x)R(x,x)$$

$$TR(c_0,c_0) \qquad \text{(za předpokladu } t_1 = c_0\text{)}$$

Levá větev:

$$T(\neg R(c_0,c_0))$$

$$T(\forall x)R(x,x)$$

$$TR(t_2,t_2)$$

$$FR(c_0,c_0)$$

$$\otimes$$

Pravá větev:

$$TP(c_0,c_0)$$

$$T(\forall x)R(x,x)$$

$$TR(t_2,t_2)$$

$$T(\forall x)R(x,x)$$

$$TR(t_3,t_3)$$

$$\vdots$$

Systematické tablo - dokončenost

Tvrzení *Pro každou teorii T a položku R je systematické tablo τ dokončené.*

Důkaz Nechť $\tau = \cup\tau_n$ je systematické tablo z $T = \{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ s R v kořeni a nechť P je položka ve vrcholu v tabla τ.

- Do úrovně v (včetně) je v τ jen konečně mnoho výskytů všech položek.
- Kdyby výskyt P ve v byl neredukovaný na nějaké bezesporné větvi v τ, byl by vybrán v nějakém kroku (2) a zredukován v $(3a)$ či $(3b)$.
- Každá $\varphi_n \in T$ bude dle (4) nejpozději v τ_{n+1} na každé bezesporné větvi.
- Tedy systematické tablo τ obsahuje pouze dokončené větve. □

Tvrzení *Je-li systematické tablo τ důkazem (z teorie T), je τ konečné.*

Důkaz Kdyby bylo τ nekonečné, dle Königova lemmatu by obsahovalo nekonečnou větev. Tato větev by byla bezesporná, neboť při konstrukci τ se sporné větve neprodlužují. Pak by ale τ nebylo sporné. □

Rovnost

Axiomy rovnosti pro jazyk L s rovností jsou

(i) $x = x$

(ii) $x_1 = y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n = y_n \ \ \rightarrow \ \ f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$
pro každý n-ární funkční symbol f jazyka L.

(iii) $x_1 = y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n = y_n \ \ \rightarrow \ \ (R(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$
pro každý n-ární relační symbol R jazyka L včetně $=$.

Tablo důkaz z teorie T jazyka L *s rovností* je tablo důkaz z teorie T^*, kde T^* je rozšíření teorie T o axiomy rovnosti pro L *(resp. jejich generální uzávěry).*

Poznámka *V kontextu logického programování má rovnost často jiný význam než v matematice (identita). Např. v Prologu* $t_1 = t_2$ *znamená, že* t_1 *a* t_2 *jsou unifikovatelné.*

Kongruence a faktorstruktura

Nechť $\sim$ je ekvivalence na A, $f : A^n \to A$ a $R \subseteq A^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Pak $\sim$ je

- *kongruence pro funkci* f, pokud pro každé $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ platí
$$x_1 \sim y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n \sim y_n \quad \Rightarrow \quad f(x_1, \dots, x_n) \sim f(y_1, \dots, y_n),$$
- *kongruence pro relaci* R, pokud pro každé $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in A$ platí
$$x_1 \sim y_1 \ \wedge \ \cdots \ \wedge \ x_n \sim y_n \quad \Rightarrow \quad (R(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow R(y_1, \dots, y_n)).$$

Nechť ekvivalence $\sim$ na A je kongruence pro každou funkci i relaci struktury $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$ pro jazyk $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. *Faktorstruktura* (*podílová struktura*) struktury $\mathcal{A}$ dle $\sim$ je struktura $\mathcal{A}/\sim \, = \langle A/\sim, \mathcal{F}^{A/\sim}, \mathcal{R}^{A/\sim} \rangle$, kde
$$f^{A/\sim}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) = [f^A(x_1, \dots, x_n)]_\sim$$
$$R^{A/\sim}([x_1]_\sim, \dots, [x_n]_\sim) \Leftrightarrow R^A(x_1, \dots, x_n)$$
pro každé $f \in \mathcal{F}$, $R \in \mathcal{R}$ a $x_1, \dots, x_n \in A$, tj. funkce a relace jsou definované z $\mathcal{A}$ pomocí reprezentantů.

Např. $\mathbb{Z}_p$ je faktorstruktura $\underline{\mathbb{Z}} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ dle kongruence modulo p.

Význam axiomů rovnosti

Nechť $\mathcal{A}$ je struktura pro jazyk L, ve které je rovnost interpretovaná jako relace $=^A$ splňující axiomy rovnosti, tj. ne nutně identita.

1) Z axiomů (i) a (iii) plyne, že relace $=^A$ je ekvivalence na A.
2) Axiomy (ii) a (iii) vyjadřují, že relace $=^A$ je kongruence pro každou funkci a relaci v $\mathcal{A}$.
3) Je-li $\mathcal{A} \models T^*$, je i $(\mathcal{A}/{=^A}) \models T^*$, kde $\mathcal{A}/{=^A}$ je faktorstruktura struktury $\mathcal{A}$ dle $=^A$, přičemž rovnost je v $\mathcal{A}/{=^A}$ interpretovaná jako identita.

Na druhou stranu, v každém modelu, v kterém je rovnost interpretovaná jako identita, všechny axiomy rovnosti evidentně platí.

Korektnost

Řekneme, že struktura $\mathcal{A}$ se *shoduje s položkou* P, pokud P je $T\varphi$ a $\mathcal{A} \models \varphi$, nebo pokud P je $F\varphi$ a $\mathcal{A} \models \neg\varphi$, tj. $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Navíc, $\mathcal{A}$ se *shoduje s větví* V, shoduje-li se s každou položkou na V.

Lemma *Nechť $\mathcal{A}$ je model teorie T jazyka L, který se shoduje s položkou R v kořeni tabla $\tau = \cup\tau_n$ z T. Pak $\mathcal{A}$ lze expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví V v tablu τ.*

Poznámka Postačí nám expanze modelu $\mathcal{A}$ o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ vyskytující se na větvi V, ostatní konstanty lze dodefinovat libovolně.

Důkaz Indukcí dle n nalezneme větev V_n v tablu τ_n a expanzi $\mathcal{A}_n$ modelu $\mathcal{A}$ o konstanty c^A pro $c \in L_C \setminus L$ na V_n tak, že $\mathcal{A}_n$ se shoduje s V_n a $V_{n-1} \subseteq V_n$.

Předpokládejme, že máme větev V_n v τ_n a expanzi $\mathcal{A}_n$ shodující se s V_n.

- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n bez prodloužení V_n, položme $V_{n+1} = V_n$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$.
- Vznikne-li τ_{n+1} z τ_n připojením $T\varphi$ k V_n pro nějaké $\varphi \in T$, nechť V_{n+1} je tato větev a $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$. Jelikož $\mathcal{A} \models \varphi$, shoduje se $\mathcal{A}_{n+1}$ s V_{n+1}.

Korektnost - důkaz (pokr.)

- Jinak τ_{n+1} vznikne z τ_n prodloužením V_n o atomické tablo nějaké položky P na V_n. Z indukčního předpokladu víme, že $\mathcal{A}_n$ se shoduje s P.

(*i*) V případě atomického tabla pro spojku položme $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n$ a snadno ověříme, že V_n lze prodloužit na větev V_{n+1} shodující se s $\mathcal{A}_{n+1}$.

(*ii*) Je-li P tvaru $T(\forall x)\varphi(x)$, nechť V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1}, tj. o položku $T\varphi(x/t)$. Nechť $\mathcal{A}_{n+1}$ je libovolná expanze $\mathcal{A}_n$ o nové konstanty z termu t. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\forall x)\varphi(x)$, platí $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/t)$. Obdobně pro P tvaru $F(\exists x)\varphi(x)$.

(*iii*) Je-li P tvaru $T(\exists x)\varphi(x)$, nechť V_{n+1} je (jednoznačné) prodloužení V_n na větev v τ_{n+1}, tj. o položku $T\varphi(x/c)$. Jelikož $\mathcal{A}_n \models (\exists x)\varphi(x)$, pro nějaké $a \in A$ platí $\mathcal{A}_n \models \varphi(x)[e(x/a)]$ pro každé ohodnocení e. Nechť $\mathcal{A}_{n+1}$ je expanze $\mathcal{A}_n$ o novou konstantu $c^A = a$. Pak $\mathcal{A}_{n+1} \models \varphi(x/c)$. Obdobně pro P tvaru $F(\forall x)\varphi(x)$.

Základní krok pro $n = 0$ plyne z obdobné analýzy atomických tabel pro položku R v kořeni s využitím předpokladu, že model $\mathcal{A}$ se shoduje s R. $\square$

Věta o korektnosti

Ukážeme, že tablo metoda v predikátové logice je korektní.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ tablo dokazatelná z T, je φ pravdivá v T, tj. $T \vdash \varphi \;\Rightarrow\; T \models \varphi$.*

Důkaz

- Nechť φ je tablo dokazatelná z teorie T, tj. existuje sporné tablo τ z T s položkou $F\varphi$ v kořeni.
- Pro spor předpokládejme, že φ není pravdivá v T, tj. existuje model $\mathcal{A}$ teorie T, ve kterém φ neplatí (protipříklad).
- Jelikož se $\mathcal{A}$ shoduje s položkou $F\varphi$, dle předchozího lemmatu lze $\mathcal{A}$ expandovat do jazyka L_C tak, že se shoduje s nějakou větví v tablu τ.
- To ale není možné, neboť každá větev tabla τ je sporná, tj. obsahuje dvojici $T\psi$, $F\psi$ pro nějakou sentenci ψ. $\square$

Kanonický model

Z bezesporné větve V dokončeného tabla vyrobíme model, který se shoduje s V. Vyjdeme z dostupných syntaktických objektů - konstantních termů.

Nechť V je bezesporná větev dokončeného tabla z teorie T jazyka $L = \langle \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$. Kanonický model z větve V je L_C-struktura $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}^A, \mathcal{R}^A \rangle$, kde

(1) A je množina všech konstantních termů jazyka L_C,

(2) $f^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$
pro každý n-ární funkční symbol $f \in \mathcal{F} \cup (L_C \setminus L)$ a $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in A$.

(3) $R^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) \Leftrightarrow TR(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ je položka na V
pro každý n-ární relační symbol $R \in \mathcal{R}$ či rovnost a $t_{i_1}, \ldots, t_{i_n} \in A$.

Poznámka *Výraz $f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})$ na pravé straně v (2) je konstantní term jazyka L_C, tedy prvek z A. Neformálně, pro zdůraznění, že jde o syntaktický objekt*

$$f^A(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n}) = \text{“}f(t_{i_1}, \ldots, t_{i_n})\text{”}$$

Kanonický model - příklad

Nechť teorie $T = \{(\forall x)R(f(x))\}$ je jazyka $L = \langle R, f, d\rangle$. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T obsahuje jedinou větev V a ta je bezesporná.

Kanonický model $\mathcal{A} = \langle A, R^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V je pro jazyk L_C a platí

$$A = \{d, f(d), f(f(d)), \ldots, c_0, f(c_0), f(f(c_0)), \ldots, c_1, f(c_1), f(f(c_1)), \ldots\},$$

$$d^A = d, \quad c_i^A = c_i \text{ pro } i \in \mathbb{N},$$

$$f^A(d) = \text{“}f(d)\text{”}, \; f^A(f(d)) = \text{“}f(f(d))\text{”}, \; f^A(f(f(d))) = \text{“}f(f(f(d)))\text{”}, \; \ldots$$

$$R^A = \{d, f(d), f(f(d)), \ldots, f(c_0), f(f(c_0)), \ldots, f(c_1), f(f(c_1)), \ldots\}.$$

Redukt $\mathcal{A}$ na jazyk L je $\mathcal{A}' = \langle A, R^A, f^A, d^A\rangle$.