Výroková a predikátová logika - IX

Petr Gregor

KTIML MFF UK

ZS 2014/2015

Kanonický model s rovností

Je-li jazyk L s rovností, T^* označuje rozšíření T o axiomy rovnosti pro L.

Požadujeme-li, aby rovnost byla interpretovaná jako identita, kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné větve V dokončeného tabla z T^* musíme faktorizovat dle $=^A$.

Dle definice (3), v modelu $\mathcal{A}$ z V pro relaci $=^A$ platí, že pro každé $t_{i_1}, t_{i_2} \in A$,

$$t_{i_1} =^A t_{i_2} \quad \Leftrightarrow \quad T(t_{i_1} = t_{i_2}) \text{ je položka na } V.$$

Jelikož V je dokončená a obsahuje axiomy rovnosti, relace $=^A$ je ekvivalence na A a navíc kongruence pro všechny funkce a relace v $\mathcal{A}$.

Kanonický model s rovností z větve V je faktorstruktura $\mathcal{A}/{=^A}$.

Pozorování *Pro každou formuli φ,*

$$\mathcal{A} \models \varphi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{A}/{=^A}) \models \varphi,$$

přičemž v $\mathcal{A}$ je $=$ interpretovaná relací $=^A$, zatímco v $\mathcal{A}/{=^A}$ jako identita.

Poznámka *Zatímco $\mathcal{A}$ je spočetný model, $\mathcal{A}/{=^A}$ může být konečný.*

Kanonický model s rovností - příklad

Nechť $T = \{(\forall x)R(f(x)),\ (\forall x)(x = f(f(x)))\}$ je nad $L = \langle R, f, d\rangle$ s rovností. Systematické tablo pro $F\neg R(d)$ z T^* obsahuje bezespornou větev V.

V kanonickém modelu $\mathcal{A} = \langle A, R^A, =^A, f^A, d^A, c_i^A\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ z V pro relaci $=^A$ platí

$$s =^A t \quad \Leftrightarrow \quad t = f(\cdots(f(s)\cdots) \text{ nebo } s = f(\cdots(f(t)\cdots),$$

kde f je aplikováno $2i$-krát pro nějaké $i \in \mathbb{N}$.

Kanonický model s rovností z V je $\mathcal{B} = (\mathcal{A}/=^A) = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B, c_i^B\rangle_{i\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned}
(A/=^A) &= \{[d]_{=^A}, [f(d)]_{=^A}, [c_0]_{=^A}, [f(c_0)]_{=^A}, [c_1]_{=^A}, [f(c_1)]_{=^A}, \ldots\},\\
d^B &= [d]_{=^A}, \quad c_i^B = [c_i]_{=^A} \text{ pro } i \in \mathbb{N},\\
f^B([d]_{=^A}) &= [f(d)]_{=^A},\ f^B([f(d)]_{=^A}) = [f(f(d))]_{=^A} = [d]_{=^A}, \ \ldots\\
R^B &= (A/=^A).
\end{aligned}$$

Redukt $\mathcal{B}$ na jazyk L je $\mathcal{B}' = \langle A/=^A, R^B, f^B, d^B\rangle$.

Úplnost

Lemma *Kanonický model $\mathcal{A}$ z bezesporné dok. větve V se shoduje s V.*

Důkaz Indukcí dle struktury sentence vyskytující se v položce na V.

- Pro φ atomickou, je-li $T\varphi$ na V, je $\mathcal{A} \models \varphi$ dle (3). Je-li $F\varphi$ na V, není $T\varphi$ na V, neboť V je bezesporná, a tedy $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ dle (3).
- Je-li $T(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $T\varphi$ a $T\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi$ a $\mathcal{A} \models \psi$, tedy $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi$.
- Je-li $F(\varphi \wedge \psi)$ na V, je $F\varphi$ nebo $F\psi$ na V, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \neg\varphi$ nebo $\mathcal{A} \models \neg\psi$, tedy $\mathcal{A} \models \neg(\varphi \wedge \psi)$.
- Pro ostatní spojky obdobně jako v předchozích dvou případech.
- Je-li $T(\forall x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/t)$ na V pro každé $t \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/t)$ pro každé $t \in A$, tedy $\mathcal{A} \models (\forall x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\exists x)\varphi(x)$ na V.
- Je-li $T(\exists x)\varphi(x)$ na V, je $T\varphi(x/c)$ na V pro nějaké $c \in A$, neboť V je dokončená. Dle indukčního předpokladu je $\mathcal{A} \models \varphi(x/c)$, tedy $\mathcal{A} \models (\exists x)\varphi(x)$. Obdobně pro $F(\forall x)\varphi(x)$ na V. $\square$

Věta o úplnosti

Ukážeme, že tablo metoda ve predikátové logice je úplná.

Věta *Pro každou teorii T a sentenci φ, je-li φ pravdivá v T, je φ tablo dokazatelná z T, tj. $T \models \varphi \;\Rightarrow\; T \vdash \varphi$.*

Důkaz Nechť φ je pravdivá v T. Ukážeme, že libovolné dokončené tablo (např. systematické) τ z teorie T s položkou $F\varphi$ v kořeni je sporné.

- Kdyby ne, v tablu τ je nějaká bezesporná větev V.
- Dle předchozího lemmatu existuje struktura $\mathcal{A}$ pro jazyk L_C shodující se s větví V, speciálně s položkou $F\varphi$ v kořeni, tj. $\mathcal{A} \models \neg\varphi$.
- Nechť $\mathcal{A}'$ je redukt struktury $\mathcal{A}$ na původní jazyk L. Platí $\mathcal{A}' \models \neg\varphi$.
- Jelikož větev V je dokončená, obsahuje $T\psi$ pro každé $\psi \in T$.
- Tedy $\mathcal{A}'$ je modelem T (neboť $\mathcal{A}'$ se shoduje s $T\psi$ pro každé $\psi \in T$).
- To je ale ve sporu s tím, že φ platí v každém modelu teorie T.

Tedy tablo τ je důkazem φ z T. $\square$

Vlastnosti teorií

Zavedeme syntaktické varianty již definovaných sémantických pojmů.

Nechť T je teorie jazyka L. Je-li sentence φ dokazatelná z T, řekneme, že φ je *věta* (*teorém*) teorie T. Množinu vět teorie T označme

$$\mathrm{Thm}^L(T) = \{\varphi \in \mathrm{Fm}_L \mid T \vdash \varphi\}.$$

Řekneme, že teorie T je

- *sporná*, jestliže je v T dokazatelný $\perp$ (spor), jinak je *bezesporná*,
- *kompletní*, jestliže není sporná a každá sentence je v ní dokazatelná či vyvratitelná, tj. $T \vdash \varphi$ či $T \vdash \neg\varphi$.
- *extenze* teorie T' jazyka L', jestliže $L' \subseteq L$ a $\mathrm{Thm}^{L'}(T') \subseteq \mathrm{Thm}^L(T)$, o extenzi T teorie T' řekneme, že je *jednoduchá*, pokud $L = L'$, a *konzervativní*, pokud $\mathrm{Thm}^{L'}(T') = \mathrm{Thm}^L(T) \cap \mathrm{Fm}_{L'}$,
- *ekvivalentní* s teorií T', jestliže T je extenzí T' a T' je extenzí T.

Důsledky

Z korektnosti a úplnosti tablo metody vyplývá, že předchozí pojmy se shodují se svými sémantickými variantami.

Důsledek *Pro každou teorii T a sentence φ, ψ jazyka L,*

- $T \vdash \varphi$ *právě když* $T \models \varphi$,
- $\mathrm{Thm}^L(T) = \theta^L(T)$,
- T *je sporná, právě když není splnitelná, tj. nemá model,*
- T *je kompletní, právě když je sémanticky kompletní, tj. má až na elementární ekvivalenci jediný model,*
- $T, \varphi \vdash \psi$ *právě když* $T \vdash \varphi \to \psi$ *(Věta o dedukci).*

Poznámka Větu o dedukci lze dokázat přímo, transformací příslušných tabel.

Existence spočetného modelu a kompaktnost

Věta *Každá bezesporná teorie T nejvýše spočetného jazyka L bez rovnosti má model, který je spočetný.*

Důkaz Nechť τ je systematické tablo z T s $F\bot$ v kořeni. Jelikož je dokončené a obsahuje bezespornou větev V, neboť $\bot$ není dokazatelný z T, existuje kanonický model $\mathcal{A}$ z V. Jelikož se $\mathcal{A}$ shoduje s V, jeho redukt na jazyk L je hledaným spočetným modelem T. $\square$

Poznámka Jde o slabou verzi tzv. Löwenheim-Skolemovy věty. V nejvýše spočetném jazyce s rovností je kanonický model s rovností nejvýše spočetný.

Věta *Teorie má model, právě když každá její konečná část má model.*

Důkaz Implikace zleva doprava je zřejmá. Pokud teorie T nemá model, je sporná, tj. je z ní dokazatelný $\bot$ systematickým tablem τ. Jelikož je τ konečné, je $\bot$ dokazatelný z nějaké konečné $T' \subseteq T$, tj. T' nemá model. $\square$

Nestandardní model přirozených čísel

Nechť $\underline{\mathbb{N}} = \langle \mathbb{N}, S, +, \cdot, 0, \leq \rangle$ je standardní model přirozených čísel.

Označme $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ množinu všech pravdivých sentencí v $\underline{\mathbb{N}}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ označme $\underline{n}$ term $S(S(\cdots(S(0)\cdots)$, tzv. *n-tý numerál*, kde S je aplikováno n-krát.

Uvažme následující teorii T, kde c je nový konstantní symbol.

$$T = \mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}}) \cup \{\underline{n} < c \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Pozorování *Každá konečná část teorie T má model.*

Tedy dle věty o kompaktnosti má T model $\mathcal{A}$, jde o nestandardní model přirozených čísel. Každá sentence z $\mathrm{Th}(\underline{\mathbb{N}})$ v něm platí, ale zároveň obsahuje prvek c^A větší než každé $n \in \mathbb{N}$ (tj. hodnota termu $\underline{n}$ v $\mathcal{A}$).

Rozšiřování teorií

Ukážeme, že zavádění nových pojmů má "pomocný charakter".

Tvrzení *Nechť T je teorie jazyka L, T' je teorie jazyka L' a $L \subseteq L'$.*

(i) *T' je extenze T, právě když redukt $\mathcal{A}$ každého modelu $\mathcal{A}'$ teorie T' na jazyk L je modelem teorie T,*

(ii) *T' je konzervativní extenze T, je-li T' extenze T a každý model $\mathcal{A}$ teorie T lze expandovat do jazyka L' na model $\mathcal{A}'$ teorie T'.*

Důkaz

$(i)a)$ Je-li T' extenze T a φ libovolný axiom T, pak $T' \models \varphi$. Tedy $\mathcal{A}' \models \varphi$ a rovněž $\mathcal{A} \models \varphi$, z čehož plyne, že $\mathcal{A}$ je modelem T.

$(i)b)$ Je-li $\mathcal{A}$ modelem T a $T \models \varphi$, kde φ je jazyka L, pak $\mathcal{A} \models \varphi$ a rovněž $\mathcal{A}' \models \varphi$. Z toho plyne, že $T' \models \varphi$ a tedy T' je extenze T.

(ii) Je-li $T' \models \varphi$, kde φ je nad L, a $\mathcal{A}$ je model T, pak v nějaké jeho expanzi $\mathcal{A}' \models \varphi$ a tedy $\mathcal{A} \models \varphi$. Z čehož $T \models \varphi$, tj. T' je konzervativní. $\square$

Extenze o definovaný relační symbol

Nechť T je teorie jazyka L, $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ je formule jazyka L ve volných proměnných $x_1, \ldots, x_n$ a L' je rozšíření L o nový n-ární relační symbol R.

Extenze teorie T *o definici* R formulí ψ je teorie T' vzniklá přidáním axiomu

$$R(x_1, \ldots, x_n) \;\leftrightarrow\; \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

Pozorování *Každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T'.*

Důsledek *T' je konzervativní extenze T.*

Tvrzení *Pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L, t.ž. $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz Každou podformuli $R(t_1, \ldots, t_n)$ nahradíme za $\psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n)$, kde ψ' je vhodná varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů. □

Např. symbol $\leq$ lze zavést v jazyce aritmetiky pomocí axiomu

$$x \leq y \;\leftrightarrow\; (\exists z)(x + z = y)$$

Extenze o definovaný funkční symbol

Nechť T je teorie jazyka L a pro formuli $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ jazyka L ve volných proměnných $x_1, \dots, x_n, y$ platí

$T \models (\exists y)\psi(x_1, \dots, x_n, y)$ (existence)

$T \models \psi(x_1, \dots, x_n, y) \ \wedge \ \psi(x_1, \dots, x_n, z) \ \rightarrow \ y = z$ (jednoznačnost)

Označme L' rozšíření L o nový n-ární funkční symbol f.

Extenze teorie T *o definici f* formulí ψ je teorie T' vzniklá přidáním axiomu

$$f(x_1, \dots, x_n) = y \ \leftrightarrow \ \psi(x_1, \dots, x_n, y)$$

Poznámka *Je-li ψ tvaru $t(x_1, \dots, x_n) = y$, kde $x_1, \dots, x_n$ jsou proměnné termu t, podmínky existence a jednoznačnosti platí.*

Např. binární funkční symbol $-$ lze zavést pomocí $+$ a unárního $-$ axiomem

$$x - y = z \ \leftrightarrow \ x + (-y) = z$$

Extenze o definovaný funkční symbol (pokr.)

Pozorování *Každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T'.*

Důsledek *T' je konzervativní extenze T.*

Tvrzení *Pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L, t.ž. $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Důkaz Stačí uvážit φ' s jediným výskytem f. Má-li φ' více výskytů f, lze postup aplikovat induktivně. Označme φ^* formuli vzniklou z φ' nahrazením termu $f(t_1, \ldots, t_n)$ za novou proměnnou z. Za φ vezmeme formuli

$$(\exists z)(\varphi^* \ \wedge \ \psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z)),$$

kde ψ' je vhodná varianta ψ zaručující substituovatelnost všech termů.

Nechť $\mathcal{A}$ je model T', e je ohodnocení, $a = f^A(t_1, \ldots, t_n)[e]$. Díky oběma podmínkám platí $\mathcal{A} \models \psi'(x_1/t_1, \ldots, x_n/t_n, y/z)[e]$ právě když $e(z) = a$. Tedy

$$\mathcal{A} \models \varphi[e] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi^*[e(z/a)] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \models \varphi'[e]$$

pro každé ohodnocení e, tj. $\mathcal{A} \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$ a tedy $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$. □

Extenze o definice

Teorie T' jazyka L' je *extenze* teorie T jazyka L *o definice*, pokud vznikla z T postupnou extenzí o definici relačního či funkčního symbolu.

Důsledek *Nechť T' je extenze teorie T o definice. Pak*

- *každý model teorie T lze jednoznačně expandovat na model T',*
- *T' je konzervativní extenze T,*
- *pro každou formuli φ' nad L' existuje φ nad L taková, že $T' \models \varphi' \leftrightarrow \varphi$.*

Např. v teorii $T = \{(\exists y)(x + y = 0), (x + y = 0) \wedge (x + z = 0) \rightarrow y = z\}$ nad $L = \langle +, 0, \leq \rangle$ s rovností lze zavést $<$ a unární funkční symbol $-$ axiomy

$$-x = y \quad \leftrightarrow \quad x + y = 0$$
$$x < y \quad \leftrightarrow \quad x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$$

Pak formule $-x < y$ je v této extenzi o definice ekvivalentní formuli

$$(\exists z)((z \leq y \ \wedge \ \neg(z = y)) \ \wedge \ x + z = 0).$$

Ekvisplnitelnost

Ukážeme, že problém splnitelnosti lze redukovat na otevřené teorie.

- Teorie T, T' jsou *ekvisplnitelné*, jestliže T má model $\Leftrightarrow$ T' má model.
- Formule φ je v *prenexním (normálním) tvaru (PNF)*, má-li tvar
$$(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) \varphi',$$
kde Q_i značí $\forall$ nebo $\exists$, proměnné $x_1, \dots, x_n$ jsou navzájem různé a φ' je otevřená formule, zvaná *otevřené jádro*. $(Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n)$ je tzv. *prefix*.
- Speciálně, jsou-li všechny kvantifikátory $\forall$, je φ *univerzální* formule.

K teorii T nalezneme ekvisplnitelnou otevřenou teorii následujícím postupem.

(1) Axiomy teorie T nahradíme za ekvivalentní formule v prenexním tvaru.

(2) Pomocí nových funkčních symbolů je převedeme na ekvisplnitelné univerzální formule, tzv. Skolemovy varianty.

(3) Jejich otevřená jádra budou tvořit hledanou teorii.

Vytýkání kvantifikátorů

Nechť Q značí kvantifikátor $\forall$ nebo $\exists$ a $\overline{Q}$ značí opačný kvantifikátor.
Pro každé formule φ, ψ takové, že x není volná ve formuli ψ,

$$
\begin{array}{lrcl}
\models & \neg(Qx)\varphi & \leftrightarrow & (\overline{Q}x)\neg\varphi \\
\models & ((Qx)\varphi \wedge \psi) & \leftrightarrow & (Qx)(\varphi \wedge \psi) \\
\models & ((Qx)\varphi \vee \psi) & \leftrightarrow & (Qx)(\varphi \vee \psi) \\
\models & ((Qx)\varphi \rightarrow \psi) & \leftrightarrow & (\overline{Q}x)(\varphi \rightarrow \psi) \\
\models & (\psi \rightarrow (Qx)\varphi) & \leftrightarrow & (Qx)(\psi \rightarrow \varphi)
\end{array}
$$

Uvedené ekvivalence lze ověřit sémanticky nebo dokázat tablo metodou (*přes generální uzávěr, není-li to sentence*).

Poznámka *Předpoklad, že x není volná ve formuli ψ je v každé ekvivalenci (kromě té první) nutný pro nějaký kvantifikátor Q. Např.*

$$\not\models \; ((\exists x)P(x) \wedge P(x)) \; \leftrightarrow \; (\exists x)(P(x) \wedge P(x))$$

Převod na prenexní tvar

Tvrzení *Nechť φ' je formule vzniklá z formule φ nahrazením některých výskytů podformule ψ za formuli ψ'. Jestliže $T \models \psi \leftrightarrow \psi'$, pak $T \models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Snadno indukcí dle struktury formule φ. □

Tvrzení *Ke každé formuli φ existuje ekvivalentní formule φ' v prenexním normálním tvaru, tj. $\models \varphi \leftrightarrow \varphi'$.*

Důkaz Indukcí dle struktury φ pomocí vytýkání kvantifikátorů, náhradou podformulí za jejich varianty a využitím předchozího tvrzení o ekvivalenci. □

Např.

$$
\begin{array}{rcl}
((\forall z)P(x,z) \wedge P(y,z)) & \rightarrow & \neg(\exists x)P(x,y) \\
((\forall u)P(x,u) \wedge P(y,z)) & \rightarrow & (\forall x)\neg P(x,y) \\
(\forall u)(P(x,u) \wedge P(y,z)) & \rightarrow & (\forall v)\neg P(v,y) \\
(\exists u)((P(x,u) \wedge P(y,z)) & \rightarrow & (\forall v)\neg P(v,y)) \\
(\exists u)(\forall v)((P(x,u) \wedge P(y,z)) & \rightarrow & \neg P(v,y))
\end{array}
$$