Zkouška VPL - písemná část

18. prosince 2014

1. Nechť $K_{n,m} = (A \sqcup B, E)$, kde $\sqcup$ značí disjunktní sjednocení, je (*úplný bipartitní*) graf s $|A| = n$, $|B| = m$, $E = \{\{u, v\} \mid u \in A, v \in B\}$. Říkáme, že množina $C \subseteq A \cup B$ je *pokrytí* grafu $K_{n,m}$, pokud pro každou hranu $\{u, v\} \in E$ platí, že $u \in C$ nebo $v \in C$.

   Chceme (rezolucí ve VL) dokázat (pro pevné n, m), že každé pokrytí C grafu $K_{n,m}$ obsahuje A nebo B. Nechť $\mathbb{P}_{n,m} = \{a_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{b_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ je množina prvovýroků, kde a_i (resp. b_j) reprezentuje, že *"i-tý vrchol z A (resp. j-tý z B) je v množině C"*.

   (a) Napište *výrok* $\varphi_{n,m}$ nad $\mathbb{P}_{n,m}$ vyjadřující, že *"C je pokrytí grafu $K_{n,m}$"*. Napište *výrok* $\psi_{n,m}$ nad $\mathbb{P}_{n,m}$ vyjadřující, že *"C obsahuje A nebo B". (2b)*

   (b) Pomocí $\varphi_{n,m}, \psi_{n,m}$ sestrojte teorii $T_{n,m}$, která je nesplnitelná, právě když $\varphi_{n,m} \models \psi_{n,m}$. Převeďte $T_{n,m}$ do množinové reprezentace. *(2b)*

   (c) Nyní $n = m = 2$. Ukažte, že $T_{2,2} \vdash_R \square$. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *(4b)*

   (d) Je $T_{2,2} \vdash_{LI} \square$? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

2. Nechť $T = \{(\forall x)(\exists y)\neg P(x, y), (\exists x)R(x), (\forall x)(\exists y)(\forall z)(\neg R(x) \vee P(y, z))\}$ je teorie jazyka $L = \langle P, R\rangle$ bez rovnosti, kde P, R je binární resp. unární relační symbol.

   (a) Skolemizací nalezněte k T ekvisplnitelnou teorii T' (nad vhodně rozšířeným jazykem) axiomatizovanou pouze univerzálními sentencemi. *(2b)*

   (b) Tablo metodou dokažte, že T' je nesplnitelná. *(4b)*

   (c) Nechť T'' je teorie tvořená právě otevřenými jádry axiomů teorie T'. Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T'', která je nesplnitelná. *Nápověda: využijte tablo z (b). (2b)*

   (d) Je teorie T kompletní? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

3. Nechť $T = \{(\exists x_1)(\exists x_2)(\forall y)(y = x_1 \vee y = x_2),\ \neg(\exists x)(f(x) \neq x)\}$ je teorie jazyka $L = \langle f\rangle$ s rovností, kde f je unární funkční symbol.

   (a) Je sentence $(\forall x)(\forall y)(f(x) = y)$ pravdivá / lživá / nezávislá v T? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (b) Je teorie T konzervativní extenzí teorie $T' = \{(\exists y_1)(\exists y_2)(\forall x)(x = y_1 \vee x = y_2)\}$ jazyka $L' = \langle\rangle$ s rovností? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (c) Jsou teorie T a T' kompletní?. Uveďte zdůvodnění. *(2b)*

   (d) Je teorie T ekvivalentní nějaké otevřené teorii? Uveďte zdůvodnění. *(2b)*