Zkouška VPL - písemná část

13. ledna 2015

1. Pokrytí šachovnice $n \times n$ kostkami domina je takové rozmístění kostek na šachových polích, že každá kostka pokrývá (svisle či vodorovně) dvě sousední šachová pole a každé pole je pokryto právě jednou kostkou. Chceme (rezolucí ve VL) dokázat (pro pevné n) jisté vlastnosti takových pokrytí. Nechť množina prvovýroků je

$$\mathbb{P}_n = \{p_{i,j} \mid 1 \le i \le n, 1 \le j < n\} \cup \{q_{i,j} \mid 1 \le i < n, 1 \le j \le n\},$$

kde $p_{i,j}$ reprezentuje, že *“pole (i,j) je pokryto (vodorovně) kostkou společně s polem $(i, j{+}1)$”*, a $q_{i,j}$ reprezentuje, že *“pole (i,j) je pokryto (svisle) kostkou společně s polem $(i+1,j)$.”*

   (a) Napište *výroky* $\varphi_{i,j}$ nad $\mathbb{P}_n$ vyjadřující, že *“pole (i,j) je pokryto právě jednou kostkou”*. Stačí uvést příslušný výrok $\varphi_{i,j}$ pro
   - *(i)* $i = j = 1$ (rohové pole),
   - *(ii)* $i = 1$, $1 < j < n$ (krajní nerohové pole),
   - *(iii)* $1 < i < n$, $1 < j < n$ (vnitřní pole),

   pro ostatní (krajní) pole výroky psát nemusíte (jsou obdobné). *(2b)*

   (b) Pro jaká n je teorie $T_n = \{\varphi_{i,j} \mid 1 \le i,j \le n\}$ splnitelná? *(2b)*

   (c) Nyní $n = 3$. Pomocí implikace napište výrok ψ nad $\mathbb{P}_3$ vyjadřující, že *“je-li pole $(1,1)$ pokryto vodorovně, je i pole $(3,3)$ pokryto vodorovně”*. Pomocí T_3 a ψ nalezněte teorii T_3', která je nesplnitelná, právě když $T_3 \models \psi$. *(2b)*

   (d) Ukažte, že $T_3' \vdash_R \square$. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. *Nápověda: stačí pět rezolučních kroků. (4b)*

2. Buď $T = \{P(x) \vee Q(x)\}$ teorie v jazyce $L = \langle P, Q \rangle$ bez rovnosti, kde P, Q jsou unární relační symboly, a L_C buď extenze L o nové různé konstantní symboly c_i s $i \in \mathbb{N}$.

   (a) Sestrojte dokončené tablo z teorie T s položkou $F\bot$ v kořeni, kde $\bot$ je sentence $(\forall x)P(x) \wedge \neg(\forall x)P(x)$. *(3b)*

   (b) V tablu z předchozího bodu nalezněte větev V a kanonický model $\mathcal{A}$ z V takový, že $\mathcal{A} \models P(x)$. *(3b)*

   (c) Nalezněte dvě neekvivalentní jednoduché kompletní extenze teorie T. *(2b)*

   (d) Buď T' extenze T o definice nových binárních relačních symbolů R a S po řadě formulemi $(P(x) \wedge \neg Q(y))$ resp. $(\neg P(x) \wedge Q(y))$. Napište formuli $\varphi(x,y)$ jazyka L takovou, že $T' \models \varphi(x,y) \leftrightarrow (R(x,x) \vee S(y,y))$. *(2b)*

3. Teorie těles T jazyka $L = \langle +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ má mezi axiomy jediný axiom φ, který není otevřený:

$$x \neq 0 \;\rightarrow\; (\exists y)(x \cdot y = 1).$$

Víme, že racionální čísla se standardními operacemi tvoří těleso a

$$T \models 0 \cdot y = 0, \quad T \models \; (x \neq 0 \;\wedge\; x \cdot y = 1 \;\wedge\; x \cdot z = 1) \;\rightarrow\; y = z.$$

   (a) Je T otevřeně axiomatizovatelná? Zdůvodněte. *(2b)*

   (b) Napište Skolemovu variantu φ_S generálního uzávěru formule φ s novým funkčním symbolem f. Nechť T' je teorie vzniklá z T nahrazením φ za φ_S. Je $T' \models \varphi$? Zdůvodněte. *(2b)*

   (c) Nechť ψ je formule $x \cdot y = 1 \vee (x = 0 \wedge y = 0)$. Napište extenzi T^* teorie T o definovaný funkční symbol f formulí ψ. *(2b)*

   (d) Je T^* ekvivalentní teorii T'? Zdůvodněte. *(2b)*