

Zkouška VPL - písemná část

20. ledna 2015

1. Nechť $T = \{(\neg p \wedge r) \rightarrow \neg q, p \rightarrow \neg(q \rightarrow r), q \vee r\}$ je teorie nad $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$.
 - (a) Tablo metodou určete všechny modely teorie T . (3b)
 - (b) Axiomatizujte $M^{\mathbb{P}}(T)$ výrokem v DNF a výrokem v CNF. (2b)
 - (c) Je T extenzí teorie $S = \{p \rightarrow q\}$ nad $\{p, q\}$? Je konzervativní extenzí? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (d) Zjistěte, kolik je navzájem neekvivalentních jednoduchých extenzí teorie T . Kolik z nich je kompletních? Uveďte zdůvodnění. (2b)

2. Jsou dána následující tvrzení:

- (i) Každý student zná každého učitele.
- (ii) Nějaký učitel existuje.
- (iii) Každý, kdo zná nějakého učitele, je vzdělán nebo není student.
- (iv) Cyril je student.

Ukažte rezolucí, že pak:

- (v) Cyril je vzdělán.

Konkrétně:

- (a) Uvedená tvrzení vyjádřete sentencemi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5$ jazyka $L = \langle S, U, V, Z, c \rangle$ bez rovnosti, kde S, U, V jsou unární relační symboly a $S(x), U(x), V(x)$ značí (po řadě), že “ x je student”, “ x je učitel”, “ x je vzdělán”, Z je binární relační symbol a $Z(x, y)$ značí, že “ x zná y ”, c je konstantní symbol označující Cyrila. (2b)
 - (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii T (případně ve větším jazyce), která je nespílitelná, právě když $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \models \varphi_5$. (2b)
 - (c) Převedením axiomů T do CNF nalezněte teorii T' ekvivalentní T a axiomatizovanou klauzulemi. Napište T' v množinové reprezentaci. (2b)
 - (d) Rezolucí dokažte, že T' není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí čtyři rezoluční kroky.* (3b)
 - (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů T' , která je nespílitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d).* (2b)
3. Nechť T je extenze teorie $DeLO^+$ (tj. hustých lineárních uspořádání s maximálním prvkem a bez minimálního prvku) v jazyce $L = \langle \leq, c \rangle$ s rovností bez nových axiomů, tj. pouze s rozšířeným jazykem o nový konstantní symbol c .
- (a) Jsou sentence $(\forall x)(x \leq c)$ a $(\forall x)(c \leq x)$ pravdivé / lživé / nezávislé v T ? Uveďte zdůvodnění. (2b)
 - (b) Určete $I(T, \omega)$, tj. počet navzájem neizomorfních spočetných modelů teorie T . (2b)
 - (c) Určete všechny (až na ekvivalenci) jednoduché kompletní extenze teorie T . (2b)
 - (d) Je teorie T otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)