

## Zkouška VPL - písemná část

29. ledna 2015

1. Nechť  $T = \{p \rightarrow \neg q, r \rightarrow q, q\}$  je teorie nad  $\mathbb{P} = \{p, q, r\}$ .
  - (a) Pomocí implikačního grafu ukažte, že  $T$  je splnitelná. (2b)
  - (b) Určete všechny modely teorie  $T$ . (2b)
  - (c) Tablo metodou dokažte, že  $T \models r \rightarrow (\neg p \wedge q)$ . (3b)
  - (d) Zjistěte, kolik je navzájem (i) neekvivalentních, (ii)  $T$ -neekvivalentních výroků, které jsou živé v  $T$ . Uveďte zdůvodnění. (2b)
  
2. Chceme (rezolucí) ukázat, že z
  - (i) definice “ $x$  je slavnější než  $y$ ” pomocí “každý, kdo zná  $y$ , zná i  $x$ ” plyne, že
  - (ii) relace “být slavnější” je transitivní.Konkrétně:
  - (a) Vyjádřete (i) a (ii) sentencemi  $\varphi, \psi$  jazyka  $L = \langle S, Z \rangle$  bez rovností, kde  $S, Z$  jsou binární relační symboly,  $S(x, y)$  značí, že “ $x$  je slavnější než  $y$ ”, a  $Z(x, y)$  značí, že “ $x$  zná  $y$ ”. *Nápověda: vyjádřete (i) pomocí ekvivalence.* (2b)
  - (b) Pomocí skolemizace předchozích formulí nalezněte otevřenou teorii  $T$  (případně ve větším jazyce), která je nespíitelná, právě když  $\varphi \models \psi$ . (2b)
  - (c) Převedením axiomů  $T$  do CNF nalezněte teorii  $T'$  ekvivalentní  $T$  a axiomatizovanou klauzulemi. Napište  $T'$  v množinové reprezentaci. (2b)
  - (d) Rezolucí dokažte, že  $T'$  není splnitelná. Rezoluční zamítnutí znázorněte rezolučním stromem. U každého kroku uveďte použitou unifikaci. *Nápověda: stačí sedm rezolučních kroků.* (3b)
  - (e) Nalezněte konjunkci základních instancí axiomů  $T'$ , která je nespíitelná. *Nápověda: využijte unifikace z (d).* (2b)
  
3. Nechť  $T = \{R(x, x), R(x, y) \rightarrow R(y, x), R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z), \varphi\}$  je teorie jazyka  $L = \langle R \rangle$  s rovnostmi, kde  $R$  je binární relační symbol a axiom  $\varphi$  vyjadřuje, že “existuje právě 5 prvků”.
  - (a) Určete izomorfní spektrum teorie  $T$ . (2b)
  - (b) Určete kolik má teorie  $T$  jednoduchých kompletních extenzí. Napište alespoň dvě z nich. (2b)
  - (c) Je teorie  $T$  otevřeně axiomatizovatelná? Uveďte zdůvodnění. (2b)
  - (d) Nechť  $T' = T \cup \{\neg R(c_1, c_2)\}$  je teorie v jazyce  $L = \langle R, c_1, c_2 \rangle$  s rovnostmi, kde  $c_1, c_2$  jsou nové konstantní symboly. Je  $T'$  konzervativní extenze  $T$ ? Uveďte zdůvodnění. (2b)